BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

Ph. 3325. c.

<36618585700017

<36618585700017

Bayer. Staatsbibliothek

Mathesis. Statica & Mechanica
Scripta var. A77.

Math. a. 50.

R

Verſuch einer Theorie

des

Schwungrades und der Kurbel,

zweyer

für die Maſchinenlehre ſehr wichtigen Gegenſtände,

nebſt

Prüfung der bisher über ſelbige bekannt gewordenen Grundſätze,

entworfen

von

Heinrich Chriſtian Brodreich,

fürſtlich ſolmſiſchem Regierungsrathe.

Frankfurt am Main,

bey Philipp Wilhelm Eichenberg.

1805.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Wohlgebohrnen

dem

Herrn Profeſſor der Phyſik und Mathematik

G. G. Schmidt

in Gieſſen,

meinem verehrteſten Freunde.

Wohlgebohrner,
Hochzuverehrender Herr Profeſſor!

Euer Wohlgebohrnen erlauben mir, Ihnen, der Sie ſo oft durch Dero gründliche Gelehrſamkeit und höchſt lehrreichen Umgang meine Kenntniſſe zu erweitern, und meine Ideen zu berichtigen die Güte hatten, durch Zueignung dieſer beyden kleinen Abhandlungen die Empfindung des lebhafteſten Dankes für Dero Gewogenheit und Freundſchaft als ein Denkmal der vollkom-

men-

menſten Hochachtung gegen Dero ausgezeichnete Verdienſte an den Tag zu legen, in welcher ich Zeit Lebens die Ehre habe zu ſeyn,

Euer Wohlgebohrnen

Lich den 1. März 1804.

gehorſamſter Diener,

H. C. Brodreich.

Vorrede.

Kein Satz kann in einer Wiſſenſchaft darum als Wahrheit gelten, weil ihn ein großer Mann geſagt hat. Einem Jeden muß daher erlaubt ſeyn, die Gründe, worauf er beruht, ohne Rückſicht auf den, der ſie vortrug, ſo genau er will oder kann, zu prüfen, und ſeine Meynung darüber freymüthig zu äußern. Umgewandt aber muß es gleich gelten, wer die Wahrheit entdeckt; genug, daß ſie Wahrheit iſt. Gewöhnlich ſetzt man ſie zwar eher an die ihr gebührende Stelle, wenn ſie zum Urheber ſich eines bekannten verdienſtvollen Gelehrten zu rühmen hat, als wenn ſie von unbekannter Hand ſo auf gut Glück unrecommandirt in die Welt geſchickt wird; allein das ſchadet im Ganzen nichts. Vielmehr wäre faſt zu wünſchen, daß ſie nie anders als ſo ſich zuerſt zeigte, der Irrthum würde vielleicht ſeltener lange unentdeckt bleiben.

Hier

Hier haben meine Leſer den Geſichtspunct, unter welchem ich betrachtet zu ſeyn wünſche. Ich hoffe nämlich zu ihrer Billigkeit, ſie werden den Grund, warum ich meiner eignen Ueberzeugung folge, und über die vorliegenden Materien anders als Andere denke, nicht in eitlen, noch weniger in ſolchen Nebenabſichten ſuchen, die ſich nicht mit der größten Hochachtung gegen die verdienten Männer vertrüge, deren Meynungen ich zu widerlegen unternehme, ſondern meiner Verſicherung glauben, daß nichts als der Wunſch nützlich zu ſeyn, bey der allgemein anerkannten Wichtigkeit der Gegenſtände, welche meinen beyden Abhandlungen zum Grunde liegen, deren öffentliche Erſcheinung veranlaßte. Ich habe, aus Mißtrauen gegen meine wenigen Kenntniſſe, lange angeſtanden, ob ich mich dazu entſchlieſſen ſollte, endlich bewogen mich die erwähnten Urſachen. Mein Wunſch iſt erreicht, wenn meine Schrift das Glück hat, des Beyfalls der Kenner nicht für unwürdig gehalten zu werden.

Bey den in der erſten Abhandlung §. 27. 31. und 33. beſchriebenen Verſuchen hätte ich mich gerne einer größern Fallhöhe als 5 Fuß bedient, wenn ich hierzu mehrere Etagen und einen Gehülfen hätte benutzen kön-

können. Ich kann indeſſen verſichern, daß ich ſie mit der größten mir möglichen Sorgfalt angeſtellt und eine ganz ausführliche Auseinanderſetzung davon nur darum vermieden habe, um dem Fehler der Weitſchweifigkeit auszuweichen; wie ich denn überhaupt, ſoviel nur der Deutlichkeit ohnbeſchadet geſchehen konnte, mich allenthalben der äußerſten Kürze zu befleißigen geſucht habe.

Eben dieſes iſt auch die Urſache, warum ich die Richtigkeit von den Reſultaten der zweyten Abhandlung an wirklichen Maſchinen zu zeigen unterließ. Da ich ſie nicht auf ſo einfache Verſuche, wie die der erſten Abhandlung ſind, einſchränken konnte; ſo hätte ich entweder eine Menge Lehrſätze aus der Mechanik und Hydraulik, die mit der Theorie der Kurbel nichts gemein haben, beybringen und beweiſen, oder für Viele unverſtändlich werden müſſen. Ich hielt es daher für beſſer, mich blos auf meinen abzuhandelnden Gegenſtand einzuſchränken, und dabey jede mir erheblich geſchienene allenfallſige Einwendung wider meine Theorie genau zu unterſuchen, und durch überzeugende Beweiſe zu entkräften. Bey dieſer Gelegenheit will ich denn auch noch des folgenden möglichen Einwurfs gedenken.

Die Bewegung der mit einer Kurbel verbundenen Maſchine, wo die Kraft mittelbar auf jene wirkt, iſt eine Verbindung von geradelinigter und kreisförmiger Bewegung, ſo daß der Kraft dieſe, der Laſt aber jene eigen bleibt. Nun beſteht aber der Ausdruck für die beſchleunigende Kraft eines ſich um eine Axe nicht frey bewegenden Körpers, aus einer Zuſammenſetzung der ſtatiſchen und Trägheitsmomente von beyden, ſowohl der Kraft als der Laſt. Es fragt ſich alſo: Was für einer Bewegung folgt die beſchleunigende Kraft, der kreisförmigen oder der geradelinigten? — und wie ſoll man im §. 21. der 2ten Abhandlung den Anſatz machen, $f : 1 = dv : - d\alpha$; oder $f : 1 = dv : - d \sin\alpha$? — Eine kleine Ueberlegung zeigt, daß der erſtere Anſatz gelte, weil man die Umdrehungsbeſchleunigung der Kurbel, oder von Kraft und Laſt, wie ſie an der Kurbel ſich äußern, zu wiſſen verlangt. Die nunmehr in dem Ausdruck

$$\frac{(P - q - Q \sin\alpha)\, d\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \sin\alpha^2}$$

vermiſchten heterogenen Größen von Bogen und Sinus werden hernach durch die Subſtitution für $d\alpha$, indem man ſowohl die Sinus als das Differential des Bogens durch Tangenten ausdrückt, wieder gleichartig.

Bey

Bey etlichen Berechnungen, hauptſächlich ſolchen, die aus der Lehre vom Größten und Kleinſten fließen, ſind die Formuln zum Theil etwas lang geworden. Nun hätte ich zwar gewünſcht, ſie geſchmeidiger einrichten zu können, ich halte aber dennoch dafür, daß ihnen dieſes nicht ſehr zum Vorwurf gereiche, ob ich gleich aus Herrn Oberbauraths Eytelwein Handbuch der Mechanik feſter Körper und der Hydraulik, Herrn Grafen Kinsky Abhandlung vom Druck der Erde auf Futtermauern, Herrn Profeſſors Langsdorf mechaniſchen und hydrodynamiſchen Grundlehren und andern Schriften weiß, daß die Practiker lange Formuln ſo ſehr zu ſcheuen pflegen, daß ſie, wie Erſterer in der Vorrede zu ſeinem eben angeführten vortrefflichen Handbuch klagt, oft lieber eine Anlage auf Gerathewohl ausführen, und den guten oder ſchlechten Erfolg risquiren, als ſich einer weitläuftigen Rechnung unterziehen wollen.

Geſchmeidige Reſultatformuln ſind wohl allerdings eine große Zierde einer analytiſchen Unterſuchung, oft erfordern ſie nicht gemeine Geſchicklichkeit, und zeugen von der tiefen Einſicht des Erfinders in die verbor-

gen-

genſten Kunſtgriffe der Analyſis, oft laſſen ſich auch ungeſchmeidige allgemeine Formuln bey der Anwendung auf wirkliche Fälle noch ganz bequem einrichten und ins Kurze ziehen; wo jedoch dies der Fall nicht iſt, da muß es, dünkt mir, dem Practiker auf ein wenig größere Aufmerkſamkeit und ein Paar Dutzend Zahlen mehr nicht ankommen. In der Mechanik iſt zwar die Trägheit von großer Wichtigkeit und allgemeiner Anwendung, ſie darf aber nur dem Mathematiker nicht im Kopfe ſitzen.

Noch finde ich nöthig hier anzumerken:

1.) Der am Ende des 15ten §. der erſten Abhandlung S. 21 von Zeile 9 bis 15 ſtehende Satz iſt, wie mir erſt nach deſſen Abdruck auffiel, etwas zu kurz ausgedrückt, und könnte deswegen leicht undeutlich ſeyn. Ich füge daher zu deſſen beſſerer Ueberſicht Nachſtehendes bey:

Wenn man eine Maſchine, wie z. B. die §. 7., ohne beſonderes Schwungrad bauen wollte, ſo würde ihr Schwung

$$h = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{M\alpha^2 + Qr^2}{AR} \quad (§. 7.)$$

ſeyn. Wäre dieſes ſo gefundene h nun für den beſtimmten Endzweck hinlänglich, oder groß genug, ſo

würde

würde es natürlicher Weiſe Ueberfluß und ſchädlich ſeyn, der Maſchine noch ein beſonderes Schwungrad beyzufügen, weil es ſonſt die Laſt derſelben ohne Noth vergrößerte, und alsdann entweder den Schwung zu groß gäbe, oder ſeinetwegen vielleicht manche Stücke der Maſchine leichter gebaut werden müßten, als mit der gehörigen Feſtigkeit beſtehen könnte.

Muß aber der Schwung größer ſeyn, als ihn die Maſchine ohne beſonderes Schwungrad ſchon an und für ſich giebt; ſo kann man entweder, mit Rückſicht auf §. 11., die Maſſen verſtärken, oder ein beſonderes Schwungrad anbringen. Wenn man alſo zuvor eine ſchickliche Größe für β oder G (§. 15.) willkührlich wählt, und berechnet, was alsdann für ein Schwung heraus kommt, ſo wird man gar bald gewahr werden, wo und wie am beſten ab- oder zuzuthun ſey; ob nur etliche Maſſen, z. B. einige Radkränze brauchen verſtärkt zu werden, oder ob es räthlicher bleibe, ein beſonderes Schwungrad anzulegen.

Eben dieſe Verhaltungsregeln ergeben ſich auch unmittelbar aus der Betrachtung der Gleichungen für β oder G des §. 15. Denn ſetzt man darin die beabſichtigte Schwunghöhe

oder

$$\text{oder } h = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{M\alpha^2 + Qr^2}{AR}$$

ſo wird β oder $G = 0$;

welches anzeigt, daß alsdann kein beſonderes Schwungrad nöthig iſt.

$$h < \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{M\alpha^2 + Qr^2}{AR}$$

macht β oder G negativ,

welches zu erkennen giebt, daß man noch überdies die Maſſen an der Maſchine zu ſtark genommen habe, und ſie leichter bauen könne.

$$h > \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{M\alpha^2 + Qr^2}{AR}$$

macht entweder Verſtärkung der Maſſen, oder ein beſonderes Schwungrad nöthig, je nachdem h wenig oder viel größer ſeyn muß, als

$$\frac{c^2}{4g} \cdot \frac{M\alpha^2 + Qr^2}{AR}.$$

2.) Daß das mechaniſche Moment von dem ſtatiſchen bey der Kurbel verſchieden iſt, hoffe ich überzeugend dargethan zu haben.

Bey zuſammengeſetzten Maſchinen modificirt alſo die Verſchiedenheit der Bewegung von Kraft und Laſt den Carteſianiſchen Grundſatz, und er beruht nur alsdann auf einem

einem **geometriſchen** Verhältniß, wenn die Bewegung der Kraft mit der Bewegung der Laſt von einerley Art iſt.

Ein ſehr einleuchtender, aber dennoch, wie mir dünkt, höchſt intereſſanter Satz! —

Zum Schluß noch eine Bitte an die Herren Recenſenten.

Ihr Zweck iſt, wie der meinige, Verbreitung der Wahrheit, ohne Rückſicht, weder auf ihren Finder, noch auf angenommene oder beſtehende Meynungen. Ich erſuche ſie alſo um Unpartheilichkeit, und, weil ich durch den Vorſatz, kurz zu ſeyn, vielleicht manchmal die gehörige Deutlichkeit vernachläſſigt haben kann, um genaue Prüfung.

Geſchrieben Lich d. 1. März 1804.

Brodreich.

Anzeige der vor Leſung des Buchs zu machenden Verbeſſerungen.

Seite 12	Zeile 16	ſtatt: $M\ \infty$	lies: $M = \infty$
— 17	— 7	— $mP(l-x)$	— $m + P(l-x)$
— 24	— 16	— x	— y
— —	— 17	— x	— y
— 29	— 5 von unten,	ſtatt: keine beſtimmte mittlere Größe	— keine beſtimmte, oder vielmehr eigentliche mittlere Größe
— 36	— 4 v. u.	— t	— t'
— 43	— 3 v. u.	— $Q = 0$	— $Q = 0$;
— 45	— 18	ſind die Worte: mit Inbegriff der halben Schnurdicke — auszuthun, und ſelbige Zeile 19 nach dem Wort: Welle, zuzuſetzen.	
— 56	— 3	ſtatt: dem	lies: deſſen
— 71	— 2	— uur	— nur
— 78	— 18	— deſſe	— deſſen
— 81	— 5 v. u. letzte Col.	0,0783	— 0,0784
— —	— 3 v. u.	— — 0,0694	— 0,0594
— 84	— 17	— bis die mechaniſchen und ſtatiſchen Momente von Kraft ꝛc.	— bis die mechaniſchen und ſtatiſchen Momente der Kraft den mechaniſchen und ſtatiſchen Momenten der Laſt ꝛc.
— 96	— 6 v. u.	ſtatt: wäre	— zu werden anfinge.
— 97	— 3	— Ω	— Q
— 98	— 16	— Schwuug	— Schwung
— 102	— 6 v. u.	— und alsdann muß die Beſchleunigung nothwendig ꝛc.	— und alsdann muß die Beſchleunigung wegfallen, folglich $\frac{P-q}{Q}$ allenthalben $= 1$, alſo dieſer Werth nothwendig ꝛc.
— 112	— 10	— größern	— größere

1.

I.

Verſuch einer Theorie
des
Schwungrades.

§. 1.

Die Abſicht des Schwungrades iſt den Gang der Maſchine gleichförmiger zu machen, und den Stockungen derſelben abzuhelfen. Jemehr alſo das Schwungrad dieſem Endzweck entſpricht, deſto vollkommener iſt es. Folglich muß ſelbiges, wenn es von Wirkung ſeyn ſoll,

1) einen gehörig lebhaften Gang, und

2) hinlängliche Schwere haben,

ſonſt wird es, wie man ſchon ohne Beweis einſieht, zu nichts dienen, als die Laſt der Maſchine zu vermehren.

§. 2.

Es fragt ſich nun:

Welche Geſchwindigkeit iſt denn fähig Schwung zu erzeugen?

Unter Schwung verſtehe ich hier diejenige Bewegung, welche ein im Kreis herumgehender Körper noch alsdann fortſetzt, wenn bereits die Kraft in ihn zu wirken aufgehört hat, folglich iſt dieſe Bewegung Effect des Geſetzes der Trägheit, und weil es keine Bewegung geben kann, worinn dieſes Geſetz ſich nicht äußern ſollte, ferner auch jeder Uebergang von der Bewegung zur Ruhe, und von der Ruhe zur Bewegung, nach dem Geſetz der Stetigkeit erfolgt; ſo iſt klar,

1) daß jederzeit Schwung entſtehen müſſe, die Geſchwindigkeit, womit der Körper ſich im Kreis herum bewegt, mag ſeyn, wie ſie immer will.

Urſach und Wirkung ſtehen miteinander im directen Verhältniß, alſo folgt weiter:

2) Große Geſchwindigkeit erzeugt großen Schwung, und je langſamer die Maſchine geht, je geringer iſt der Schwung. Er iſt aber nie = 0; auſſer wenn die Kraft entweder nur eben ſo groß oder noch geringer iſt als die Laſt, nebſt den übrigen Hinderniſſen der Bewegung.

Allein in dieſem Fall erfolgt auch keine Bewegung; daher muß

3) jedes Rad in Bewegung zugleich ein Schwungrad ſeyn,

aber oft ein als ſolches unbrauchbares, weil der Schwung deſſelben vielleicht nicht lebhaft genug ſeyn kann.

Wie lebhaft er ſeyn müſſe, lehrt die Rechnung, und hiervon hernach.

§. 3.

Nur Verſtärkung der Kraft wirkt Vermehrung des Schwungs, alſo wäre es ein ganz vergebliches Unternehmen, die Maſchine blos allein durch Anbringung eines Schwungrades in ſchnellere Bewegung ſetzen zu wollen. Bey einerley Kraft muß ſie wegen des Widerſtandes der Luft, Reibung ꝛc. auch wegen der vermehrten Trägheitsmaſſe nothwendig langſamer dadurch gehen.

In=

Indeſſen kann dieß oft zu Anlegung eines Schwungrades Abſicht ſeyn. Zum Beyſpiel dienen der Bratenwender, die Unruhe in der Uhr, der Windfang in ſelbiger u. ſ. w.

§. 4.

Durch Anlegung eines Schwungrades kann der Gang der Maſchine nur dann gleichförmiger werden, wenn deſſen Maſſe ſchwer genug iſt, um durch ihre Trägheit den Stockungen der Maſchine hinlänglich zu widerſtehen. Alſo wo eine Maſchine zu wenig Maſſe hat, kann es rathſam werden, ein beſonderes Schwungrad anzulegen, in ſo ferne man nicht erſterer ſelbſt am gehörigen Ort mehr Maſſe geben kann oder darf, denn das Schwungrad verurſacht, daß die Maſchine in Bewegung ihren Beharrungsſtand ſpäter verläßt, als wo keines angebracht iſt.

§. 5.

Sobald die Stockungen oder Hinderniſſe der Bewegung ſo groß werden, daß ſie der Kraft das Gleichgewicht halten, oder ſie gar noch übertreffen, dann müßte ohne Schwungrad die Maſchine ſtill ſtehen, und dieſes hat nunmehr auf gewiſſe Weiſe die Bewegung allein zu unterhalten, bis die Kraft wieder wirken kann.

So lange aber die auf die Maſchine wirkende Kraft größer iſt als die Laſt, ſo lange iſt Ueberwucht da, und die Maſchine geht ohne Schwungrad fort; es iſt folglich in der Rückſicht, um bloshin die Maſchine im Gang zu erhalten, keins nöthig, obſchon, wegen zu vieler Ungleichförmigkeit darinn, deſſen Anlegung vielleicht von gutem Nutzen ſeyn kann.

§. 6.

Man ſieht alſo nunmehr, worauf es beym Schwungrad ankommt:

Man darf nämlich nur beſtimmen, wie lang die Maſchine noch für ſich fortgehen ſoll, nachdem die Kraft in ſie zu wirken gänzlich aufgehört hat.

Ich ſage gänzlich, denn bewegt die Maſchine noch Kraft, welche fähig iſt, die Laſt zu überwinden, ſo iſt auch noch Ueberwucht da, und ſie geht ohnehin fort. Will man aber wiſſen, wieviel dieſe vorhandene Kraft durch den Schwung, den man für die Maſchine unter der Vorausſetzung findet, als ob keine Kraft mehr wirkte, gewinnen oder ſich verſtärken werde; ſo darf man nur die Ueberwucht zu der gefundenen Größe der Trägheit addiren und den Widerſtand der Stockungen abziehen.

Bleibt zwar noch Kraft übrig, ſie iſt aber zu ſchwach, um die Laſt zu überwinden; ſo iſt für ſich klar, daß es alsdann eben ſo viel iſt, als ob gar keine Kraft mehr wirkte.

§. 7.

Durch Hülfe eines Rades, worauf die Kraft wirkt, werde an einer Welle, worüber ein Seil hängt, eine Laſt aufgewunden, man ſucht den Schwung des Rades und der Welle, wenn die genannten Abmeſſungen, nebſt der Geſchwindigkeit des angegriffenen Punctes gegeben ſind.

Der Halbmeſſer der Welle heiſſe r; der des Rades ſey = R; die Laſt = Q; die Kraft = k; ihre Maſſe = K; das Gewicht des Rades, der Welle und aller ſchwingenden Theile überhaupt = M; der Reibungscoefficient = μ; der Halbmeſſer der Zapfen = ϱ; der Widerſtand der Steifigkeit

des

des Seils $= \frac{s}{r}$; ſo hat man für die bewegende Kraft am Rade

$$\frac{k - \mu\varrho(\mathfrak{M} + K + Q) + \frac{s}{r} + rQ.}{R}$$

Wenn man Kürze halber

$$\mu\varrho(\mathfrak{M} + K + Q) + \frac{s}{r} + rQ = \mathfrak{A}$$

ſetzt, und ferner $\mathfrak{M}\alpha^2$ das Moment der Trägheit aller ſchwingenden Theile bedeuten läßt; ſo wird die beſchleunigende Kraft

$$\frac{\frac{kR - \mathfrak{A}}{R}}{\frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2}{R^2}}$$

Man hat folglich für die Geſchwindigkeit des angegriffenen Punctes $= c$ in der Zeit t, (die Fallhöhe in einer Secunde $= g$ geſetzt),

$$c = \frac{kR - \mathfrak{A}}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2} R \,.\, 2gt;$$

Nun denke man ſich die Kraft plötzlich weggenommen; ſo würde die Laſt ihre Bewegung wegen des Geſetzes der Trägheit nichts deſto weniger fortſetzen, und ſo lange mit abnehmender Geſchwindigkeit ſteigen, bis letztere $= 0$ wird. Die Zeit, in welcher dies geſchieht, ſey $= T$; ſo iſt folglich die Geſchwindigkeit des angegriffenen Punctes nach weggenommener Kraft und nach Verlauf der Zeit T,

wenn $\mu\varrho(\mathfrak{M} + Q) + \frac{s}{r} + rQ = A$ geſetzt wird,

$$c - \frac{AR}{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2} \,.\, 2gT = 0; \;(\mathfrak{P})$$

woraus man erhält

$$T = \frac{c(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)}{2gAR}$$

daher,

daher, und weil die beſchleunigende Kraft nun noch

$$= \frac{\frac{A}{R}}{\frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{R^2}}$$

bleibt; wie aus der Gleichung (♀) erhellet; ſo iſt die größte Höhe h, auf welche das Rad zu ſteigen vermag, (Karſtens Mechanik §. 40. und §. 56.)

$$h = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{A\,R} - \frac{A\,R}{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2} \cdot \frac{g\,c^2(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)}{4g^2 A^2 R^2}$$

das iſt $h = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{A\,R}$

Die größte Höhe des Schwungs für die Welle wäre $\frac{hr}{R}$ oder, wenn dieſe Größe = H geſetzt wird,

$$H = \frac{c^2}{4g} \frac{(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)\,r}{A\,R^2}$$

wo aber c ſich auf die Geſchwindigkeit des Rades bezieht. Wird c für die Geſchwindigkeit der Welle angenommen; ſo hat man

$$H = \frac{c^2}{4g} \frac{(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)}{A\,r}$$

§. 8.

I.) Man ſetze c = o; ſo verſchwindet die ganze Gleichung, folglich entſteht immer Schwung, die Geſchwindigkeit mag, wie man will, angenommen werden.

II.) Man ſetze h = o; ſo verſchwindet entweder ebenfalls die ganze Gleichung, oder man erhält

$$\alpha \sqrt{\mathfrak{M}} = r\sqrt{-Q};$$

welches ſagen will: Für eine Maſchine in Bewegung muß immer Schwung da ſeyn, und es iſt unmöglich, daß keiner erfolge. Welches alſo mit §. 2. Anm. 1, 2, 3, übereinſtimmt.

III.)

III). Setzt man in der Formul $h = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR}$ eine der Größen $\mathfrak{M}$, Q, R oder r veränderlich; ſo wächſt Zähler und Nenner zugleich ins Unendliche; welches man leicht ſieht, wenn man für A und $\mathfrak{M}\alpha^2$ ihre gehörigen Werthe nimmt. Es giebt daher auch kein anderes Maximum für h, wie aus der Natur der Sache, ſchon an und für ſich folgt. Denn ſowohl die Maſſen $\mathfrak{M}$; Q; als die Halbmeſſer R; r; geben, mit dem Quadrat der Geſchwindigkeit multiplicirt, bloshin ein Product, mit welchem der Schwung im Verhältniß ſteht, daher mit ihm zugleich wächſt oder abnimmt, indem, wie hier geſchieht, gar nicht auf die Größe der bewegenden Kraft geſehen wird, man ihr alſo auch keine Gränzen ſetzt.

Es darf aber, wenn von Anordnung eines Schwungrades die Rede iſt, die Frage auch nicht ſo geſtellt werden, ſondern es muß vielmehr ſo gefragt werden:

welches iſt die vortheilhafteſte Maſſe der Maſchine, Ladung der Laſt, der vortheilhafteſte Halbmeſſer des Rades oder der Welle, bey einer gegebenen Kraft?

und nun giebt es wohl ein Maximum für h.

Um alſo die eben aufgeſtellten Fragen zu beantworten, iſt in der Gleichung

$$h = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR}$$

zuvor für c ſein Werth

$$= \frac{(kR - \mathfrak{A})}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2}\, R\, 2gt$$ herzuſtellen,

wo man dann erhält:

$$h = \frac{(kR - \mathfrak{A})^2 (\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)}{(\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2)^2 A}\, R\, g\, tt$$

§. 9.

§. 9.

Schreibt man, weil A und 𝔄 aus 𝔐 mit andern Größen vermiſcht beſteht; für ſolche $\mu\,\varrho\,\mathfrak{M} + B$ und $\mu\,\varrho\,(\mathfrak{M} + K) + B$; ſo wird aus der nächſt vorhergehenden Gleichung

$$h = \frac{(kR - \mu\varrho(\mathfrak{M}+K) - B)^2\,(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)}{(\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2)^2\,(\mu\,\varrho\,\mathfrak{M} + B)}\,R\,gtt.$$

Nimmt man hierin 𝔐 als veränderlich an; ſo iſt klar,

I.) Wenn 𝔐 wächſt; ſo nimmt h ab, bis es für $\mu\varrho(\mathfrak{M} + K) + B = kR$ ganz verſchwindet. Läßt man 𝔐 ferner wachſen; ſo nähert ſich nun das Quadrat von $\mu\varrho(\mathfrak{M} + K) + B - kR$, dividirt durch obigen Nenner, unendlich einer Gränze $= \frac{\mu\,\varrho\,R\,gt^2}{\alpha^4}$; weil für $\mathfrak{M} = \infty$ dieſe Größe ganz aus der Gleichung herausfällt, wobey zugleich h ein Kleinſtes wird.

Es giebt alſo, ſo lange man die Maſſe blos an und für ſich, ohne Rückſicht auf andere Beſtimmungen, von welchen ſie Function ſeyn kann, betrachtet, keinen vortheilhafteſten Werth derſelben für den Schwung, indem, je kleiner jene wäre, je größer dieſer; folglich für den Schwung am vortheilhafteſten ſeyn würde, wenn die Maſchine ohne alle Maſſe gebaut werden könnte.

II. Nimmt man Q als veränderlich an; ſo folgt auf ähnliche Art, daß es für den Schwung auch keine vortheilhafteſte Ladung der Laſt gebe, ſo lange man nämlich ſelbige an und für ſich, ohne Rückſicht auf andere Beſtimmungen in der Gleichung betrachtet, ſondern erſterer nur dann am größten ſeyn müßte, wenn die Maſchine mit gar keiner Laſt beſchwert würde, welches Reſultat, wie das von Num. I., auch ohne Rechnung aus der Natur der Sache von ſelbſt fließt.

III.) Aber einen vortheilhafteſten Halbmeſſer des Rades giebt es allerdings für den Schwung; denn ſetzt man in der Gleichung zu Ende des vorigen §⁶; R = 0; ſo verſchwindet ſelbige, und h wird ebenfalls = 0. Das Nämliche erfolgt, wenn man $R = \frac{\mathfrak{A}}{k}$ ſetzt. Da alſo jedes h, das zwiſchen die eben berührten zwey verſchwindenden Werthe von R fällt; größer als ſie ſeyn muß; ſo iſt klar, daß es irgend einen größten Werth dafür geben werde.

Seine Entwickelung aus obiger Formul iſt zwar keinen Schwierigkeiten unterworfen, falls man ſich dabey einer Näherungsmethode bedienen will, es giebt aber eine Gleichung vom 4ten Grade, die zur Anwendung unbequem iſt, und die man entbehren kann, weil es von ſelbſt in die Augen fällt, daß der vortheilhafteſte Halbmeſſer für die größte Beſchleunignng der Kraft auch zugleich der vortheilhafteſte Halbmeſſer für den Schwung ſeyn müſſe. Man hat daher nur aus der Gleichung (§. 7.)

$$c = \frac{(k R - \mathfrak{A}) R}{\mathfrak{M}\alpha^2 + K R^2 + Q r^2} \cdot 2 g t$$

das Maximum für c zu ſuchen, indem man K als veränderlich annimmt.

Da $\mathfrak{M}\alpha^2$ jederzeit eine Function von R ſeyn muß, ſo will ich ſelbige durch $M (R^2 + N^2)$ ausdrücken, wo M einer aliquoten Theil von $\mathfrak{M}$ vorſtellt, und wodurch ſich vorſtehende Formul in

$$c = \frac{(k R - \mathfrak{A}) R}{M (R^2 + N^2) + K R^2 + Q r^2} \, 2 g t$$

abändert. Wenn man nun auf die gewöhnliche Art verfährt, ſo erhält man zum vortheilhafteſten Halbmeſſer des Rades

$$R = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}^2 (M + K) q + k^2 q^2} - k q}{\mathfrak{A} (M + K)}$$

wo q ſtatt $M N^2 + Q r^2$ geſetzt worden iſt.

Auch giebt es

IV.) einen vortheilhafteſten Halbmeſſer der Welle, und dieſer iſt aus der Gleichung

$$c = \frac{(k\,R - \mathfrak{A})\,r}{\mathfrak{M}\alpha^2 + K R^2 + Q r^2}\,2\,gt$$

zu ſuchen, wo c ſich auf die Geſchwindigkeit der Welle bezieht. Wenn man nämlich $B + Qr$ für $\mathfrak{A}$, und $M(N^2 + r^2)$ ſtatt $\mathfrak{M}\alpha^2$ ſchreibt, ſo erhält man

$$c = \frac{(k\,R - B - Qr)\,r}{M(N^2 + r^2) + K R^2 + Q r^2}\,2\,gt;$$

und es wird

$$r = \frac{\sqrt{b^2 Q^2 + b\,(M + Q)\,(kR - B)^2} - b\,Q}{(M + Q)\,(k\,R - B)}$$

wo b ſtatt $M N^2 + K\,R^2$ geſetzt iſt.

§. 10.

Aus der Vergleichung der beyden vorhergehenden Paragraphen ſcheinen zween Widerſprüche hervorzugehen;

1) die Gleichung $h = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{A\,R}$ giebt, wenn man $\mathfrak{M}\ \infty$ ſetzt, für h ein Maximum, nämlich

$$h = \frac{c^2\,\alpha^2}{4\,g\,\mu\,\varrho\,R}$$

Die Gleichung $h = \frac{(k\,R - \mathfrak{A})^2\,(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)\,R}{(\mathfrak{M}\alpha^2 + K R^2 + Qr^2)^2\,A}\,gtt$ aber, bey eben der Vorausſetzung, für h ein Minimum, nämlich

$$h = \frac{\mu\,\varrho\,R\,gt^2}{\alpha^4}$$

Dieſer anſcheinende Widerſpruch löſt ſich dadurch:

Im 8ten §. wurde die Geſchwindigkeit c als eine gegebene Größe betrachtet, ohne darnach zu fragen, durch welche Kraft, oder in welcher Zeit dieſe Geſchwindigkeit erzeugt

würde,

würde, daher kann unter ſolchen Umſtänden kein anderes Reſultat erfolgen, als daß der Schwung ſtets mit der ſchwingenden Maſſe zunehmen müſſe. Im §. 9. aber werden die Kraft k, durch welche, und die Zeit t, in welcher die Geſchwindigkeit c erzeugt werden ſoll, als gegebene Größen betrachtet, und daraus iſt klar, daß c, folglich auch h, deſto kleiner werden müſſe, je größer M wird.

2) Ein zweyter Widerſpruch ſcheint folgender zu ſeyn: Im §. 9. heißt es: Es giebt keine vortheilhafteſte Maſſe von Rad und Welle und keine vortheilhafteſte Ladung der Laſt für den Schwung, jedoch einen vortheilhafteſten Halbmeſſer des Rades oder der Welle. Nun aber laſſen ſich aus den Gleichungen für letztere jederzeit auch M oder Q entwickeln, welches alſo nothwendig ſodann derjenige Werth für die Maſſe der ſchwingenden Theile, oder der Laſt ſeyn muß, für welchen der Schwung am größten wird.

Dieſer Widerſpruch läßt ſich ſo heben: Wenn man in der Gleichung für c (§. 9.) nichts als die Maſſe veränderlich annimmt, auch ſelbige nur an und für ſich ſelbſt, ohne Rückſicht auf andere Beſtimmungen, von denen ſie abhängen kann, betrachtet; ſo werden hierdurch den Größen R und r keine Gränzen geſetzt, und ſie bleiben unbeſtimmt. Es kann alſo bey dieſen ganz unbeſtimmten Werthen von R oder r keine beſtimmte Maſſe von Rad und Welle, oder ein Maximum geben, denn letztere iſt eine Function von R oder r, und wächſt oder nimmt ab mit dieſen Größen. Eben ſo verhält ſichs, wenn nichts als die Laſt veränderlich angenommen wird, denn ſo lange R und r ganz willkührlich bleiben, ſo lange kann nichts erfolgen, als daß Q abnimmt, wenn R oder r wachſen, und umgekehrt. Aber ein Anderes iſt es, wenn in Anſehung der Größen R oder r ein vortheilhafteſter Werth feſtgeſetzt wird. Nun iſt nichts mehr willkührlich, und alle Functionen von ihnen müſſen ſich nach dieſen Größen ſelbſt richten.

Drückt

Drückt man im (§. 9.) den aliquoten Theil von M, der durch M angedeutet wurde, durch μ M aus, und ſchreibt B ſtatt $\mu\,\varrho\,(Q + K) + \frac{s}{r} + r\,Q$; ſo läßt ſich das Maximum von M ſo wohl als von Q aus den Gleichungen für den vortheilhafteſten Werth von R und r (§. 9. III. und VI.) entwickeln, die Ausdrücke werden aber unbequem. Je nachdem man nun hierzu die eine oder die andre Gleichung von denen im (§. 9. III. und IV.) befindlichen wählt, je nachdem bekommt man andere Werthe; denn eine Gleichung für die größte Beſchleunigung der Kraft giebt andere Beſtimmungen von M und Q, als eine Gleichung für die größte Beſchleunigung der Laſt. Erſtere nämlich bezieht ſich auf den vortheilhafteſten Halbmeſſer des Rades, bey jeder möglichen Beſtimmung die man den obigen Größen zu geben für gut findet, letztere auf den vortheilhafteſten Halbmeſſer der Welle, bey jeder willkührlichen Annahme der übrigen Größen.

§. 11.

Für die vortheilhafteſte Vertheilung der Maſſe an der Maſchine iſt noch zu bemerken, daß man jeden nahe an der Umdrehungsaxe der Maſchine liegenden Theil ſo leicht wie möglich bauen, und die meiſte Maſſe nahe an den Umfang bringen müſſe. Denn man denke ſich alle Maſſe eines Rades ganz auf eine gewiſſe Entfernung γ von der Umdrehungsaxe angebracht, und das Uebrige ohne Schwere; ſo iſt natürlich das Moment, womit ſie wirkt, und die Winkelgeſchwindigkeit um ſo größer, je größer die Entfernung γ von der Axe iſt.

§. 12.

Es kann Fälle geben, wo die Schwere des Seiles oder der Kette, die man zum Aufwinden der Laſt anwendet, beträchtlich wird, daher auch im Schwung der Maſchine

Aenderungen verurſacht, die man nicht auſſer Acht laſſen darf.

Zuerſt ſey der Schwung zu finden, wenn zwey mit einem Seil oder einer Kette verbundene Maſſen durch Hülfe einer Rolle auf und nieder gezogen werden.

Die ganze Länge des Seils oder der Kette ſey $= l$ (Fig. 1.); ihre ſpecifiſche Schwere, oder was ein Fuß, Zoll ꝛc. von der Länge derſelben wiegt $= P$. Der Theil AM ſey $= x$ ſo iſt $Am = l - x$. Die Maſſe von AM iſt alſo $= Px$ und die von $Am = P(l - x)$. Wenn nun ferner die am Seil hängenden Gewichte M und m heißen, ſo hat man auf der einen Seite die Maſſe $M + Px$; und auf der andern die Maſſe $m + P(l - x)$.

Die beſchleunigende Kraft $\mathfrak{F}$ der Rolle mit Seil und Gewichten iſt folglich

$$= \frac{M + Px - \frac{\mu\varrho(M + \mathfrak{M} + Px + m + P(l-x))}{R} - \frac{s}{r} - m - P(l-x)}{\frac{1}{2}\mathfrak{M} + M + Px + m + P(l - x)}$$

Alſo

$$\mathfrak{F} = \frac{MR + RPx - \mu\varrho(M + \mathfrak{M} + m + Pl) - \frac{s}{r} - R(m + P(l-x))}{R(\frac{1}{2}\mathfrak{M} + M + m + Pl)}$$

Es ſey Kürze halber

$\mu\varrho(M + \mathfrak{M} + m + Pl) + \frac{s}{r} + R(m + Pl) = A$; und

$\frac{1}{2}\mathfrak{M} + M + m + Pl = B$; ſo hat man

$$\mathfrak{F} = \frac{MR - A + 2RPx}{RB}$$

Da nun $\mathfrak{F}$ hier eine veränderliche Größe iſt; ſo ſey u die Fallhöhe für die Geſchwindigkeit des Seils mit den Gewichten, und man erhält für das Aufwinden von m

$du : dx = \frac{MR - A + 2RPx}{RB} g : g$ als der Beſchleunigung der Schwere. Hier-

Hieraus folgt

$$du = \frac{MRdx - Adx + 2RPxdx}{RB}$$

und

$$u = \frac{(MR - A)x + RPx^2}{RB} + Const.$$

Iſt nun zu Anfang der Bewegung M in V und $AV = b$; ſo wird $u = o$ für $x = b$. Man erhält alſo

$$Const. = -\frac{(MR - A)b + RPb^2}{RB}$$ folglich iſt

$$u = \frac{(MR - A)(x - b) + RP(x^2 - b^2)}{RB}.$$

Dieſes u iſt ſtatt $\frac{c^2}{4g}$ in die Gleichung für den Schwung zu ſetzen. Wenn man alſo (§. 7.) ſtatt $\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2$ hier $(\frac{1}{2}\mathfrak{M} + m + P(l - x))R^2 = \mathfrak{B}R^2$, und für das dortige A hier $\mu\varrho(\mathfrak{M} + m + Pl) + R(m + P(l - x)) = \mathfrak{A}$ ſchreibt; ſo erhält man

$$h' = \frac{((MR - A)(x - b) + RP(x^2 - b^2))\mathfrak{B}}{B\mathfrak{A}}.$$

In dieſem Ausdruck braucht man nur die Höhe x zu meſſen, ſonſt aber weder Zeit noch Geſchwindigkeit zu wiſſen, als die ſich durch die Kraft M beſtimmen.

Iſt aber die Geſchwindigkeit bekannt, ſo erhält man, wenn aus der Gleichung

$$\frac{c^2}{4g} = \frac{(MR - A)^2}{R^2B^2}gtt;$$

für $MR - A$ gehörig ſubſtituirt wird,

$$h' = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}R(x - b)\left(\frac{c}{2gt} + \frac{P(x - b)}{B}\right)$$

§. 13.

Wenn, wie (§. 7.) die Laſt an einem Seile, das ſich um eine Welle windet, durch Hülfe eines mit derſelben ver-

verbundenen Rades ſo aufgezogen werden ſoll, daß während deſſen auf der andern Seite ebenfalls eine Laſt z. B. ein leerer Kübel niedergeht, ſo iſt die Kraft alsdann $= k + M + Px$, die Laſt $= m + P(l - x)$; die beſchleunigende Kraft auf den angegriffenen Punct reducirt aber =

$$\frac{(kR + r(M + Px) - \mu\varrho(\mathfrak{M} + K + M + Px + m + P(l - x))}{R}$$

$$- \frac{\frac{s}{r} - r(m + P(l - x)))}{R} : \frac{KR^2 + \mathfrak{M}\alpha^2 + r^2(M + Px + mP(l - x))}{R^2}$$

Schreibt man nun, wie vorher,

$$\mu\varrho(\mathfrak{M} + K + M + m + Pl) + \frac{s}{r} + r(m + Pl) = A;$$

$$KR^2 + \mathfrak{M}\alpha^2 + r^2(M + m + Pl) = B;$$

$$\mu\varrho(\mathfrak{M} + M + m + Pl) + \frac{s}{r} + r(m + Pl) = \mathfrak{A};$$

$$\mathfrak{M}\alpha^2 + r^2(M + m + Pl) = \mathfrak{B};$$

ſo wird der Schwung

$$h' = \frac{((kR + rM - A)(x - b) + rP(x^2 - b^2))\,\mathfrak{B}}{B\,\mathfrak{A}},$$

oder auch

$$h' = \frac{(kR + rM - A)(x - b) + rP(x^2 - b^2)(B - KR^2)}{B(A - \mu\varrho K)}$$

Es bedarf keiner Erinnerung, daß M hier den leeren, m aber den vollen Kübel bedeutet, und daß man, wenn der Schwung für den Fall geſucht wird, wo M ganz niedergeſunken iſt, in den Werthen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, keinesweges aber in denen von A und B, und dem erſten Factor der Gleichung, $M = 0$ zu ſetzen habe.

§. 14.

Iſt das Seil mit einem Ende an der Welle feſtgemacht; ſo daß M und m nicht wechſelsweiſe auf und niedergehen, ſondern nur eins von beyden vorhanden; ſo würde man

ganz falſch ſchlieſſen, wenn man in den vorigen Formuln, M oder m = o; x = l ſetzen, und den herauskommenden Ausdruck für den Werth von h′ halten wollte.

Dieſer Fall, wo ein Kübel auf- und niedergeht, erfordert eine eigne Berechnung, und hat mehr Schwierigkeit, als wo zwey Kübel angebracht ſind.

Die Kraft wirke, wie vorher, auf den Umfang eines Rades (z. B. eines Spillenrades) und ſey = k; die Laſt = m winde ſich über die Welle dieſes Rades; ſo iſt die beſchleunigende Kraft

$$\mathfrak{F} = \frac{kR - \mu\varrho(\mathfrak{M} + K + m + Pl) - \frac{s}{r} - r(m + Px)}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + r^2(m + Px)} R;$$

oder wenn $\mu\varrho(\mathfrak{M} + K + m + Pl) + \frac{s}{r} + rm = A$, und $\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + r^2 m = B$ geſetzt wird;

$$\mathfrak{F} = \frac{kR - A - rPx}{B + r^2 Px} R.$$

Es iſt daher, wie (§. 13.), nur für das Aufwinden von m die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe negativ genommen,

$$du = -\frac{(kR - A)dx - rPxdx}{B + r^2 Px} R; \text{ alſo}$$

$$\int du = -R(kR - A)\int\frac{dx}{B + r^2 Px} + rPR\int\frac{xdx}{B + r^2 Px}.$$

Man ſchreibe, der leichteren Ueberſicht wegen, z für $B + r^2 Px$; ſo wird der erſte Theil des Integrals

$$= -\frac{R(kR - A)}{r^2 P}\int\frac{dz}{z}$$

$$= -\frac{R(kR - A)}{r^2 P} \text{ Log. nat. } (B + r^2 Px).$$

und der andere Theil deſſelben

$$= \frac{rPR}{r^4 P^2} z - \frac{rPRB}{r^4 P^2} \text{ Log. nat. } z.$$

Folglich das Ganze

$$u = \frac{R(B + r^2 P x)}{r^3 P} - \frac{Rr(kR - A) + RB}{r^3 P} \text{ L. nat.}(B + r^2 P x) + \text{Const.}$$

Iſt nun beym Anfang der Bewegung $u = o$; für $x = b$; ſo wird das vollſtändige Integral

$$u = \frac{Rr(kR - A) + RB}{r^3 P} \text{ Log. nat.} \left(\frac{B + r^2 P b}{B + r^2 P x} \right) + \frac{R(x - b)}{r}.$$

Für den Schwung erhält man

$$h' = \frac{u \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} R};$$

wo $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{M}\alpha^2 + r^2 (m + P x)$; $\mathfrak{A}$ aber anſtatt $\mu \varrho (\mathfrak{M} + m) + \frac{s}{r} + r (m + P x)$ gilt.

Muß das Seil ſo lang ſeyn, daß ein mehrmaliges Uebereinanderwinden auf der Welle unvermeidlich bleibt; ſo iſt die Dicke der Letzteren eine veränderliche Größe. Durch eine größere Länge die man ihr giebt, wird aber immer zu erhalten ſeyn, daß ſie von dem vortheilhafteſten Werth des Halbmeſſers (§. 9. IV.) nicht beträchtlich abweicht.

Im Allgemeinen iſt nun noch zu erinnern. In den bisherigen Rechnungen wurde die Veränderung, die durch die Schwere des Seils in der Beſchleunigung verurſacht wird, für die Schwunghöhe, als von unbeträchtlichem Einfluß auſſer Acht gelaſſen. Um aber genau zu rechnen, müßte man in den Formuln (§. 12., 13., 14.) immer $x + h'$ für x ſchreiben, und alsdann die Größe h' entwickeln. So würde man für die Rolle im (§. 12.) z. B. erhalten:

$$h' = \frac{((MR - A)(x + h' - b) + RP((x + h')^2 - b^2))(\mathfrak{B} - Ph')}{B(\mathfrak{A} - RPh')};$$

wo dann h' durch die Cardaniſche Regel, oder eine Näherungsmethode gefunden werden könnte.

§. 15.

Soll ein beſonderes Schwungrad angelegt werden; ſo ſey der äuſſere Halbmeſſer des Schwungrings $= \mathfrak{R}$; der innere $= r$; die Breite des Schwungrings, parallel mit der Axe der Welle gemeſſen, $= \beta$; das ſpeciſiſche Gewicht der Maſſe, aus welcher der Ring beſteht $= \gamma$; die übrigen Beſtimmungen ſeyen dieſelben, wie ſie im §. 7. angegeben worden ſind.

Es iſt alsdann das Moment der Trägheit des Schwungrings $= \frac{1}{2}\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4)$,
daher ſeine Maſſe auf den Umfang des Rades reducirt,

$$= \frac{\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4)}{2R^2}.$$

Man hat alſo für die bewegende Kraft der Maſchine

$$k = \frac{\mu\varrho(\mathfrak{M} + K + Q + \pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2)) + \frac{s}{r} + rQ}{R}.$$

Setzt man nun, wie vorher, Kürze halber,

$$\mu\varrho(\mathfrak{M} + K + Q) + \frac{s}{r} + rQ = \mathfrak{A};$$

ſo wird der beſchleunigenden Kraft Geſchwindigkeit

$$c = \frac{kR - \mathfrak{A} - \mu\varrho\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2)}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4)} R.\ 2gt.$$

woraus man, nach einem ähnlichen Verfahren wie (§. 7.), für den Schwung erhält,

$$h = \frac{c^2}{4g}\ \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4)}{(A + \mu\varrho\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2))R}\ (\mathfrak{C}).$$

und wo A ſtatt $\mu\varrho(\mathfrak{M} + Q) + \frac{s}{r} + rQ$ geſchrieben worden iſt.

Das Moment der Trägheit des Schwungrings läßt ſich auch durch $\frac{1}{2}G(\mathfrak{R}^2 + r^2)$ ausdrücken; wo G dem vorigen $\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2)$ gleich iſt; alsdann wird

$$h = \frac{c^2}{4g}\ \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}G(\mathfrak{R}^2 + r^2)}{(A + \mu\varrho G)R}\ (\mathfrak{D}).$$

Aus

Aus (X) folgt, wenn die Anzahl der Umläufe, die das Schwungrad ohne weiteres Einwirken der Kraft machen ſoll, das iſt, h als gegeben angenommen, oder willkührlich beſtimmt wird;

$$\beta = \frac{4ghAR - c^2(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)}{(\frac{1}{2}c^2(\mathfrak{R}^2 + r^2) - 4gh\mu\varrho R)(\pi\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2))},$$

und aus der Formul für h, wo die Maſſe des Schwungrings durch G ausgedrückt iſt, folgt

$$G = \frac{4ghAR - c^2(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)}{\frac{1}{2}c^2(\mathfrak{R}^2 + r^2) - 4gh\mu\varrho R}.$$

Für das Aufſuchen der Größen β oder G muß ich aber noch ausdrücklich erinnern, daß, um h nicht kleiner anzunehmen, als es die Geſchwindigkeit der Maſchine ſchon an und für ſich giebt, man ſelbiges zuvor aus (X) oder (Y) zu entwickeln habe, indem man vorläufig einſtweilen β oder G willkührlich feſtſetzt. Hernach kann mit Sicherheit ab- und zugethan werden.

§. 16.

Für das Maximum des im nächſtvorhergehenden Paragraph gefundenen Schwungs gelten dieſelbigen Schlüſſe, wie (§. 8. III.) nämlich, die Formul ſieht wiederum nicht auf die Größe der bewegenden Kraft, und ſetzt ſolcher keine Gränzen, es muß alſo jeder in der Formul als veränderlich angenommene Werth ins Unendliche wachſen, und kann eben deswegen auch kein anderes Maximum Statt finden.

Wird hingegen die Formul (X) oder (Y) auf eine beſtimmte Kraft eingerichtet, und für c ſein Werth

$$= \frac{(kR - \mathfrak{A} - \mu\varrho\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2))R}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4)}\,2gt$$

oder $= \dfrac{(kR - \mathfrak{A} - \mu\varrho G)R}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}G(\mathfrak{R}^2 + r^2)}\,2gt$

geſetzt; ſo verändern ſich die eben gedachten Formuln in

h =

$$h = \left(\frac{kR - \mathfrak{A} - \mu\varrho\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2)}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4)}\right)^2 \times$$

$$\frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4)}{A + \mu\varrho\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2)} R\,gtt$$

oder

$$h = \left(\frac{kR - \mathfrak{A} - \mu\varrho G}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}G(\mathfrak{R}^2 + r^2)}\right)^2 \times$$

$$\frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}G(\mathfrak{R}^2 + r^2)}{A + \mu\varrho G} R\,gtt$$

und nun giebt es allerdings ein Maximum für h.

§. 17.

Es ſind aber die Reſultate, welche man findet, wenn man $\mathfrak{M}$; Q; R; r veränderlich ſetzt, mit denen des (§. 9.) ganz einerley, wie die Natur der Sache auch ſchon an und für ſich lehret, ich will ſie daher nicht wiederholen. Uebrigens fällt wegen der Größen β und $\mathfrak{R}$ in die Augen, daß h abnehmen müſſe, wenn ſelbige wachſen, und umgekehrt, wie ſolches bey $\mathfrak{M}$ und Q auch der Fall iſt.

Es bleibt alſo, um den vortheilhafteſten Werth für β oder $\mathfrak{R}$ zu erhalten, kein anderer Weg übrig, als nach Anleitung des (§. 10.) das Maximum für R aus der Gleichung für die Geſchwindigkeit zu ſuchen, und hernach hieraus β oder $\mathfrak{R}$ zu entwickeln. Wählt man hierzu die Gleichung

$$c = \frac{kR - \mathfrak{A} - \mu\varrho G}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}G(\mathfrak{R}^2 + r^2)} R\,2gt$$

und ſchreibt, ſtatt $\mathfrak{M}\alpha^2$, wie vorher, $M(R^2 + N^2)$; ſo erhält man zum vortheilhafteſten Halbmeſſer des Rades

$$R = \frac{\sqrt{B^2DF + k^2D} - kD}{BF}$$

wo B ſtatt $\mathfrak{A} + \mu\varrho G$; D ſtatt $(MN^2 + Qr^2 + \frac{1}{2}G(\mathfrak{R}^2 + r^2)$ und F ſtatt $M + K$ geſetzt iſt.

Hier:

Hieraus läßt ſich nun G und R, folglich auch β durch den erhaltenen Werth von G finden, welches am leichteſten durch eine Näherungsmethode bewerkſtelligt werden kann.

§. 18.

Je länger der Schwung dauert, je mehr nimmt die bewegende Kraft der Maſchine ab.

Um alſo die Kraft x zu erfahren, welche die Stockungen der Maſchine an einer beſtimmten Stelle y dem Schwung entgegen ſetzen, kann man ſich, z. B. in Anſehung der Gleichung für h (§. 7.) ſo verhalten:

Für $y = h$ muß $x = 0$, und für $x = \frac{kR - \mathfrak{A}}{R}$ muß $y = 0$ ſeyn. Dies erlangt man, da die Wege ſich wie die Kräfte verhalten, durch folgende Proportion:

$$h : \frac{kR - \mathfrak{A}}{R} = h - y : x,$$

folglich iſt

$$x = \frac{kR - \mathfrak{A}}{R} \left(\frac{h - y}{h}\right).$$

Weiß man alſo die Größe der Stockung an der Maſchine, und die Stelle, wo ſie ſich äuſſert; ſo findet ſich die Größe des Schwungs, welchen die Maſchine noch übrig behält,

$$y = h - \frac{hxR}{kR - \mathfrak{A}}.$$

Ein Beyſpiel wird die Sache erläutern: Es ſey eine Maſchine angelegt, bey welcher man den Schwung, den ſie nach weggenommener Kraft haben müßte, berechnet und $= h$ gefunden hat. In der Ausübung aber ergiebt ſich für eine beſtimmte Stelle der Maſchine, wenn man die Kraft daſelbſt plötzlich aufhebt, und die Maſchine ohne ſelbige fortgehen läßt, daß der Schwung nicht $= h$, ſondern

nur

nur = y ſey. Alsdann muß der bey der Berechnung des Schwungs nicht mitberechnete Widerſtand der Stockungen für die beſtimmte Stelle = x oder

$$= \frac{kR - \mathfrak{A}}{R} \left(\frac{h - y}{h}\right) \text{ſeyn.}$$

Umgekehrt ſey der Widerſtand der Stockungen für eine gewiſſe Stelle an der Maſchine bekannt; es muß aber ſelbige den Weg S durchlaufen, ehe der Widerſtand aufhört, oder ehe die Maſchine wieder mit voller Kraft wirken kann; nun fragt ſich: wird der in der Maſchine für dieſe Stelle noch übrige unbekannte Schwung zureichen, um x und S zu überwinden?

Die Auflöſung dieſer Frage erhält man durch die Gleichung

$$y = h - \frac{h\,x\,R}{k\,R - \mathfrak{A}}$$

Nämlich, man berechne erſtlich, ohne Rückſicht auf x, wie groß h ſeyn würde, ſetze es in ebengedachte Gleichung und ſuche x; ſo ergiebt ſich, ob es $\gtrless$ S iſt.

Alles dieſes gilt jedoch eigentlich nur von dem Fall, wenn man in Anſehung einer gewiſſen beſtimmten Stelle an der Maſchine zu berechnen und auszumachen hat; ob daſelbſt der Schwung die Stockungen gehörig zu überwinden im Stande; oder auch, wie groß an dieſer Stelle der Widerſtand der Stockungen ſey.

Will man aber nur überhaupt, und nicht von einer beſtimmten Stelle an der Maſchine dieſes ausmachen; ſo wird es am natürlichſten ſeyn, die Größe des Widerſtandes der Stockungen zur Laſt zu ſchlagen und h nach §. 7. oder folg. zu ſuchen.

§. 19.

§. 19.

Zur vortheilhafteſten Anordnung eines Schwungrades braucht h gera‿e kein Maximum zu ſeyn, ſondern nur den beſtimmten Werth zu haben, den die übrige Einrichtung der Maſchine verlangt, und welcher dem Endzweck, wozu ſie da iſt, gehörig entſpricht.

Um die Sache mit einem Beyſpiel zu erläutern, diene folgende Aufgabe:

Man will durch Hülfe eines Rades an einer Welle (Spillenrades) vermittelſt eines über Letztere gewundenen Seiles eine Laſt in die Höhe ziehen. Es würde für den Arbeiter am bequemſten ſeyn, wenn er von Zeit zu Zeit = t nachlaſſen, und nach einem dem Rade gegebenen Schub wieder friſch angreifen könnte. Da aber dieſer Arbeiter, ohne bald zu ermüden, dem Rad nur die Geſchwindigkeit = c zu geben vermag; ſo fragt ſich: wird dieſe bey einem gewiſſen ſchon vorräthigen Rad an einer Welle, deſſen man ſich bedienen könnte, für den verlangten Endzweck zureichen? oder, wo nicht, wie groß müßte, wegen ihrer, der Halbmeſſer des Rades gemacht werden, um der Bedingung Genüge zu leiſten?

Wenn man die Schwere des Seils nicht in Betrachtung zu ziehen nöthig findet, so hat man aus (§. 7.)

$$h = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR}.$$

weil nun hier nicht h, ſondern die Zeit gegeben iſt, worinn die Höhe h erreicht wird; ſo ſetze man für h ſeinen Werth $= \frac{1}{2}$ ct, alſo

$$\tfrac{1}{2}\,ct = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR};$$

Hieraus erhält man

$$c = \frac{AR}{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}\, 2\,gt;$$

Dieſe

Dieſe Geſchwindigkeit müßte folglich der Arbeiter dem Rad durch den Schub geben können. Kann er das nicht; ſo muß der Radhalbmeſſer verändert werden. Man findet aber für ſelbigen, wenn $\mathfrak{M}\alpha^2 = M (R^2 + N^2)$ geſetzt wird,

$$R = \frac{A g t \pm \sqrt{A^2 g^2 t^2 - (M N^2 + Q r^2) c^2 M}}{c M}$$

wo nur das obere Zeichen gilt.

§. 20.

Ueberhaupt erinnere ich, in Anſehung des Maximi von h, um größerer Deutlichkeit willen, noch Folgendes, wiewohl es aus dem Vorhergehenden bereits erhellet:

h iſt die größte Höhe, welche der Schwung zu erreichen vermag (§. 7.), folglich, in ſo ferne alle übrige Einrichtungen der Maſchine ſchon ihre Beſtimmung haben, an und für ſich immer ein Maximum. Dieſes aber ſchließt nicht aus, daß bey einer andern Einrichtung der Maſchine h nicht dennoch einen größern Werth erhalten könne, welcher jedoch, wie natürlich, von der Vollkommenheit jener und der möglich größten Beſchleunigung abhängt, die man der Kraft oder Laſt giebt.

Soll alſo h im eigentlichen Verſtande ein Maximum werden, ſo muß die Maſchine in ſo weit noch unbeſtimmt ſeyn, daß man ihre Beſchleunigung und überhaupt ihren Bau am vortheilhafteſten einrichten könne. Hat man in Anſehung der hierzu gehörigen Beſtimmungen das Maximum gefunden; ſo iſt es für h zugleich mit gefunden.

Aus dieſem Werth und den Gränzen der Geſchwindigkeit zwiſchen welchen ſich die Maſchine erhalten ſoll, läßt ſich ſodann das vortheilhafteſte M oder Q u. ſ. w. entwickeln, es ſey nun, daß man h blos für eine gewiſſe beſtimmte Stelle an der Maſchine zu wiſſen verlangt, wo ihre

Sto-

Stockungen am größten werden, oder daß man für die Aenderungen der Geſchwindigkeit überhaupt zuvor den mittleren Werth ſuchen; und hieraus für den Gang im Allgemeinen die Werthe von h; M; Q ꝛc. berechnen will.

§. 21.

Es iſt nunmehr noch übrig, das bisher Vorgetragene mit dem zu vergleichen, was Andere über das Schwungrad gelehrt haben.

Ehedem folgte man den Grundſätzen Polhems, welcher im 4ten Theile der Abhandlungen der Schwediſchen Akademie den Lehrſatz aufſtellt:

„Der Abſtand des Schwingungspunctes eines Schwungrades von der Axe muß ſo groß ſeyn als die Länge eines einfachen Penduls, welches in der Hälfte der Zeit, worin das Schwungrad einen Umlauf vollenden ſoll, einen Schlag thut.“

Herr Profeſſor Langsdorf zu Erlangen war, ſo viel ich weiß, der Erſte, welcher das Unzulängliche der Polhemſchen Theorie fühlte, und eine neue aufſtellte, ob er gleich in ſeinen ältern Schriften ebenfalls der erſteren beygepflichtet hatte.

§. 22.

Durch Polhems Theorie findet man den Schwung und die Abmeſſungen des Schwungrades blos für einen einzelnen Fall, oder die Vorausſetzung richtig, daß die Schwungkraft der Schwere gleich, das iſt, der Schwingungshalbmeſſer ſo groß ſeyn ſoll, wie die doppelte der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe, mit welcher er im Kreis herumgeht. Polhems Regel läßt folglich der Maſchine auch nichts anders

ders als die hierzu erforderliche Geſchwindigkeit zu, wodurch aber, je nachdem die übrigen Beſtimmungen an der Maſchine beſchaffen ſind, weder der vortheilhafteſte Schwung, noch ſelbſt ein eigentlicher mittlerer Werth für ſolchen erhalten wird.

Denn man ſetze, der in Polhems Regel verlangte Schwingungshalbmeſſer ſey $= S$; und $\pi : 1$ das Verhältniß des Umkreiſes zum Durchmeſſer; C aber die Geſchwindigkeit des Schwingungshalbmeſſers; ſo durchläuft ſein Endpunct den Umkreis in $\frac{2\pi S}{C}$ Secunden. Ein Pendul, das in der Hälfte dieſer Zeit einen Schlag thut, habe die Länge f; und die Länge des Secundenpenduls ſey $= a$; ſo iſt, weil ſich die Oſcillationszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendullängen verhalten,

$$1 \text{ Secunde} : \sqrt{a} = \frac{2\pi S}{C} : \sqrt{4f} \text{ alſo}$$

$$\sqrt{4f} = \frac{2\pi S \sqrt{a}}{C} \text{ und}$$

$$f = \frac{\pi^2 a S^2}{C^2};$$

Es iſt aber $\pi^2 a = 2g$ (Karſtens Mechanik §. 181) daher

$$f = \frac{2g S^2}{C^2}$$

Nun ſoll nach der Bedingung von Polhems Regel $f = S$ ſeyn, alſo

$$C = \sqrt{2gS}$$

Hieraus folgt, daß die Schwungkraft alsdann der Schwere gleich ſeyn müſſe; Karſten (a. a. O. §. 126) und zugleich

$$\frac{C^2}{2g} = S$$

welches die zwey erſten der obigen Sätze ſind.

Weil

Weil ferner S = f, ſo iſt auch $\frac{C^2}{f} = 2g$; nun wurde im (§. 7.) gefunden

$$h = \frac{c^2}{4g} \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR}, \text{ alſo}$$

$$2g = \frac{c^2}{2h} \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR} = \frac{C^2}{f}$$

Es iſt aber R : c = S : C folglich

$$\frac{c^2}{2h} \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR} = \frac{fc^2}{R^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{(\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2)R}{2fA} = h = \frac{c^2}{4g} \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR};$$

woraus man erhält

$$\frac{R\sqrt{2g}}{\sqrt{f}} = c.$$

Es kann aber die Geſchwindigkeit für den Schwung, wie aus der Formul (§. 7.)

$$h = \frac{c^2}{4g} \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + Qr^2}{AR} \text{ ſich ergiebt,}$$

größer oder kleiner als $\frac{R\sqrt{2g}}{\sqrt{f}}$ ſeyn, je nachdem die Beſtimmungen der Beſtandtheile der Maſchine angenommen werden, und es iſt allgemein, oder an und für ſich betrachtet, h nur dann ein Maximum, wenn c = ∞ iſt, indem h mit c wächſt und abnimmt (§. 8. III.); folglich erhält man durch die Polhemſche Rechnungsart für den Schwung kein Maximum, aber auch keine beſtimmte mittlere Größe, denn bewandten Umſtänden nach, läge ſelbige zwiſchen o und ∞.

Hierdurch ſind alſo auch die zwey letzteren der obigen Sätze bewieſen.

§. 23.

Polhems Regel iſt daher, wie man ſieht, eine ganz willkührliche, den Schwung im Allgemeinen gar nicht beſtimmende Angabe, womit weder für die Theorie noch die Praxis das Geringſte gewonnen wird. Zwar findet man durch ſie, wie ſchon erwähnet worden, allerdings eine gewiſſe Geſchwindigkeit, wodurch Schwung erzeugt wird, aber das iſt auch Alles, was ſich meiner Einſicht nach, von ihr ſagen läßt. Weil indeſſen eine jede Geſchwindigkeit, ſie ſey auch welche ſie wolle, Schwung erzeugt, ſo wird im Allgemeinen durch jede andere willkührliche Annahme gerade eben ſo viel als durch ſie bezweckt.

Ich übergehe die Gründe, womit Büſch, Mönnich und Andere Polhems Theorie zu unterſtützen geſucht haben. Ihre umſtändliche Widerlegung würde zu weitläuftig ſeyn, und ich halte ſie für unnöthg, denn, ſo ſcheinbar dieſe Gründe auch immer beym erſten Anblick ſeyn mögen, ſo läßt ſich dadurch dennoch auf keine Weiſe einſehen: warum zum Schwungrad gerade eben dieſe und keine andere Geſchwindigkeit brauchbar ſeyn ſollte? und das wäre doch bey ihr ſchlechterdings die Hauptſache, worauf es ankäme, oder was erwieſen werden müßte.

Polhem giebt, vermuthlich aus eben dieſer Urſache, ſeine Theorie ſelbſt für nichts weiter als eine Hypotheſe aus, wie auch Herr Profeſſor Mönnich in ſeiner Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichſten Maſchinen S. 61 erinnert; und obgleich Herr Profeſſor Langsdorf ehedem, (man ſehe ſeine mechaniſchen und hydrodynamiſchen Unterſuchungen S. 61 und 65) ihr durch die Einſchränkung zu helfen dachte, „die Schwungkraft beym Schwungrad dürfe wohl größer, niemals aber kleiner als die Schwere ſeyn“; ſo bleibt doch auch dieſe Behauptung ganz willkührlich, beſtimmt die

Größe

Größe des Schwungs nicht, und beruht auf keinem ſichern Grund. Wie wohl er eben das nachgehends ſelbſt einſah und eine eigne Theorie des Schwungrads bekannt machte.

§. 24.

In ſeinen Grundlehren der mechaniſchen Wiſſenſchaften hat er ſelbige mit Anwendung auf den Hornhaſpel neu vorgetragen.

Es ſey mir erlaubt, mich ſeiner eignen Worte zu bedienen, und die Sätze worauf es ankommt, kurz auszuziehen.

Er betrachtet das Schwungrad in folgender S. 382 bis 385 daſelbſt ſtehenden

Aufgabe.

„Um den Rundbaum eines Hornhaſpels ſoll ein Schwungring gelegt werden, welcher vermögend iſt, von dem Augenblick an, da die Haſpelknechte aufhören am Horn zu drehen, blos vermöge ſeines Schwungs noch n Umdrehungen zu machen.“

Auflöſung.

„1.) Der Halbmeſſer vom inneren Umfang des Schwungrings heiſſe r, der vom äuſſern R, ſeine Breite, parallel mit der Axe des Rundbaums gemeſſen l, die Geſchwindigkeit des Kurbelgriffs, in dem Augenblick, da die Haſpelknechte zurücktreten = C, das Gewicht von 1 Cubicfuß (oder Cubiczoll) der Materie, aus welcher der Ring beſteht = ψ in Pfunden, ſo hat man für das Mom. der Trägheit des Schwungrings $= \frac{6,281\psi}{4}(R^4 - r^4)$

daher ſeine Maſſe auf den äuſſern Umfang reducirt

$$= \frac{6281\psi}{4R^2}(R^4 - r^4).$$

„2.)

„2.) Die Maſſe der beyden Kübel ſammt Ladung und Seil in Pfunden ſey = 𝔐, ſo iſt, ſolche gleichfalls auf den äuſſern Umfang des Schwungrings reducirt, $= \frac{r^2 \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2}$; wenn der Halbmeſſer des Rundbaums bis zur Mittellinie der Seilende = r heißt.

„3.) Nennt man ferner die Armlänge am Horn = 𝔑, den Halbmeſſer der Zapfen = ϱ, den Coefficienten der Zapfenreibung = μ, das Gewicht des Rundbaums = A, das der Zapfen und Hörner = B das eines leeren Kübels = $\frac{1}{2}$ q, das Gewicht der Ladung = 𝔐, welches die Nutzlaſt iſt, den Widerſtand des Seils $= \frac{E}{r}$, das Gewicht des Seils auf die Länge von 1 Lachter = k, und die Tiefe des Schachts vom Pfudeiſen bis zur Sohle in Lachtern = N; ſo iſt die Laſt am Halbmeſſer des Rundbaums

$$= M + \frac{E}{r} + Nk + \frac{\varrho}{R} \mu (Q + 3,14 (\mathfrak{R}^2 - r^2) l \psi)$$

wo Q = M + q + A + B + N k iſt. Setzt man

$$M + \frac{E}{r} + Nk + \frac{\varrho}{R} \mu Q = \alpha \text{ und}$$

$\frac{\varrho}{R} \mu . 3,14 (\mathfrak{R}^2 - r^2) \psi = \beta$; ſo iſt die Laſt auf den äuſſern Umfang des Schwungrings reducirt $= \frac{r}{\mathfrak{R}} (\alpha + \beta l)$.

„4.) Demnach die verzögernde Kraft, welche in die Maſſe des Schwungrings wirkt

$$= \frac{\frac{r}{\mathfrak{R}} (\alpha + \beta l)}{\frac{r^2}{\mathfrak{R}^2} \mathfrak{M} + \frac{6,281 \psi}{4 \mathfrak{R}^2} (\mathfrak{R}^4 - r^4)}.$$

„5.) Dieſe

„5.) Dieſe würde dem äuſſern Umfang des Schwungrings, bey n Umdrehungen, eine Geſchwindigkeit

$$v = 2 \sqrt{\frac{\frac{r}{\mathfrak{R}}(\alpha + \beta\, l)}{\frac{r^2}{\mathfrak{R}^2}\,\mathfrak{M} + \frac{6,281\psi}{4\mathfrak{R}^2}(\mathfrak{R}^4 - r^4)} \cdot g \times n \,.\, 6,28\mathfrak{R}}$$

nach der entgegengeſetzten Richtung mittheilen.

„6.) Es iſt aber, nach der Vorausſetzung, die anfängliche Geſchwindigkeit des Umfangs

$$= \frac{\mathfrak{R}}{R}\, C;$$

alſo am Ende der n ten Umdrehung, welche der Schwungring noch für ſich macht, ſeine Geſchwindigkeit

$$= \frac{\mathfrak{R}}{R}\, C - v.$$

„7.) Da die Geſchwindigkeit am Ende der n ten Umdrehung (Nr 6) = o ſeyn ſoll, ſo hat man

$$v = \frac{\mathfrak{R}\, C}{R} = 2 \sqrt{\frac{\frac{r}{\mathfrak{R}}(\alpha + \beta l)\; n \,.\, 6,28\, \mathfrak{R}\, g}{\frac{r^2}{\mathfrak{R}^2}\,\mathfrak{M} + \frac{6,281\psi}{4\,\mathfrak{R}^2}(\mathfrak{R}^4 - r^4)}}$$

woraus ſich

$$l = \frac{n r g \alpha - \frac{C^2 r^2}{25,12 R^2}\,\mathfrak{M}}{\frac{(\mathfrak{R}^4 - r^4)\,\psi\, C^2}{16 R^2} - n r g \beta}$$ ergiebt.

Exempel. Es ſey $M + \frac{E}{r} + N k = 200$ ℔; $n = \frac{1}{2}$ $r = 0,4$ Fuß; $g = 15,6$ F. $R = 1,4$ F. $C = 2,5$ F. $\mathfrak{R} = 3$ F. $r = 2\frac{1}{2}$ F. ψ für Eichenholz $= 61$ ℔ $\mathfrak{M} = 210$ ℔; $Q = 300$ ℔ $\frac{\varrho}{R} = \frac{1}{14}$ und $\mu = \frac{1}{4}$; ſo wird $l = 1,32$ Fuß.“

§. 25.

Herr Profeſſor Langsdorf hat zu Berechnung des Schwungs die Fundamentalformul der Mechanik

$$C = 2\sqrt{\frac{P}{M} g S}$$

zum Grund gelegt, und hierauf ſeine Darſtellungsart gebaut, es ſchien mir aber auf die Art, wie er zu Werk gegangen iſt,

1.) der Schwung nicht gerade zu (directe), ſondern nur vermittelſt einer willkührlichen Annahme (oblique), gefunden zu ſeyn.

2.) ſind Schwung und Geſchwindigkeit zwey ſo durchaus von einander abhängige Größen, daß die Vermehrung oder Verminderung der einen, ſchlechterdings die Vermehrung oder Verminderung der andern nach ſich zieht.

Es läßt ſich daher nicht wohl, wie hier gelehret wird, C als gegeben betrachten, und n ſo geradezu willkührlich annehmen, das könnte leicht die Folge haben, daß die Geſchwindigkeit für den Bau der Maſchine den Schwung ohnehin ſchon größer gäbe, als man ihn beſtimmte. Da

3.) Herr Profeſſor Langsdorf auch nicht zeigt, wie man ſich zu verhalten habe, wenn die Kraft mit in Rechnung gezogen werden muß, und

4.) ſein Reſultat, welches er aus der Lehre vom Größten und Kleinſten zieht (S. 27 der Maſchinenlehre und 597 der Grundlehren der mechaniſchen Wiſſenſchaften) nur für den Fall eingerichtet iſt, wenn mit der Maſchine Maſſen verbunden ſind, die ihre Geſchwindigkeit periodiſch plötzlich ändern, ſo habe ich die gegenwärtige

Ent-

Entwickelung der Theorie des Schwungrades aus ihren erſten Grundſätzen für einleuchtender, faßlicher und zugleich überzeugender gehalten, indem die Wichtigkeit des Gegenſtandes mir es zu verdienen ſchien, über die Gründe, woraus er zu betrachten iſt, jeden allenfallſigen Zweifel zu entfernen.

Die periodiſch plötzlichen Geſchwindigkeitsänderungen der Maſchinen, in ſo weit ſie Einfluß auf den Schwung haben, werden ſich übrigens aus der ganz einfachen Formul des §. 18. immer genügend berechnen und die hierhin gehörigen Reſultate ohne Mühe finden laſſen. Denn ſo bald die Maſchine ihre Geſchwindigkeit plötzlich ändert, ſo muß für die Stelle, wo dies geſchieht, eine Stockung, oder ein gewiſſer Widerſtand vorhanden ſeyn, bringt man ſelbigen nun nach Anleitung des erwähnten §. 18. in Rechnung, ſo erhält man die Geſchwindigkeitsänderung oder Verminderung des Schwungs, die für letzteren noch übrige Kraft u. ſ. w. von ſelbſt.

Fragt man aber: was ergiebt ſich für ein Maximum in Anſehung des Schwungs, bey Maſchinen mit plötzlichen Geſchwindigkeitsänderungen? ſo will man dieſes

1.) entweder für den Schwung wiſſen, wenn alle übrige Einrichtungen der Maſchine ſchon ihre Beſtimmung haben, und nur diejenige Maſſe, welche von der Kraft periodiſch angegriffen wird, noch unbeſtimmt iſt.

Weil $y = h$ wird, wenn $x = 0$ iſt; ſo kann es natürlicher Weiſe auch für y kein anderes Maximum geben; denn der Schwung und die Größe des Widerſtandes, welche die periodiſch in Bewegung kommenden Maſſen ihm entgegen ſetzen, ſtehn bloß im umgekehrten Verhältniß, je

 grö-

größer dieſe ſind, je kleiner wird jener; folglich könnte der Schwung nur dann am größten ausfallen, wenn gar kein periodiſch wechſelnder Widerſtand vorhanden wäre.

Oder man will

2.) das Maximum für den Schwung wiſſen, wenn die Abmeſſungen der Maſchine überhaupt noch unbeſtimmt ſind.

Hier gilt für Maſchinen mit plötzlichen Geſchwindigkeitsänderungen eben das, was §. 9. und §. 20. ſchon im Allgemeinen angemerkt iſt.

Es kommen aber alsdann ſo vielerley plötzliche Geſchwindigkeitsabwechslungen, als von neuem in Bewegung zu ſetzende Maſſen vor. Um die Sache mit einem Beyſpiel zu erläutern, ſo ſey eine ſolche Maſſe = m; ihre Entfernung von der Bewegungsaxe = b; die Zeit des Umlaufs, bis die Maſchine ſie in Bewegung zu ſetzen beginnt, = t; und von da bis ihr Angriff aufhört, oder, welches hier Einerley ſagt, bis die Maſchine den folgenden Umlauf anfängt, = t′; ſo iſt am Ende der Zeit t, die Geſchwindigkeit des von der Kraft angegriffenen Punctes

$$c = \frac{kR - \mathfrak{A}}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2} R \,.\, 2gt;$$

am Ende der Zeit t′ aber iſt ſelbige

$$c' = \frac{kR - \mathfrak{A} - mb}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2 + mb^2} R \,.\, 2gt;$$

folglich überhaupt

$$C = c + c' = \left(\frac{(kR - \mathfrak{A})\, t}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2} + \frac{(kR - \mathfrak{A} - bm)\, t'}{\mathfrak{M}\alpha^2 + KR^2 + Qr^2 + mb^2}\right) 2gR$$

Hier-

Hieraus iſt nun das Maximum der Beſchleunigung zu ſuchen, als wodurch ſich ſodann die vortheilhafteſten Werthe für den Schwung nach §. 9. III. mit ergeben. Seine Größe für jede Stelle des Maſchinenumlaufs erhält man nachher ſehr leicht aus §. 18.

§. 26.

Wenn man in der Aufgabe, die Herr Profeſſor Langsdorf auflößt, nicht allein die Veränderlichkeit der Kraft, wegen der Kurbel am Hornhaſpel, ſondern auch die Veränderlichkeit der Beſchleunigung, welche die Schwere des Seils verurſacht, mit in Rechnung ziehen ſollte; ſo könnte man ſo verfahren;

Das Umherführen der Kurbel geſchieht durch ein abwechſelndes Heben, Schieben und Ziehen, wodurch dann die Wirkung auf die Laſt gleichförmiger wird, als wenn die Kraft immer in paralleler Richtung mit dem horizontalen Durchmeſſer auf den ſenkrechten Querſchnitt der Welle ginge. Letzteres wäre für die Kraft der nachtheiligſte Fall, und nur ein ſehr ungeſchickter Arbeiter könnte die Kurbel ſo umzudrehen unternehmen. Indeſſen mag eben deswegen hier dieſe Vorausſetzung einſtweilen gelten. Man hat alsdann, wenn der Winkel, um welchen ſich der Kurbelgriff von dem horizontalen Stand gegen die Welle entfernt, δ heißt, für die Kraft k sin δ zu ſchreiben, und kann hierunter ſo wohl den Mittelwerth 0,707 k (man ſehe die folgende Abhandlung) als jeden andern verſtehen.

Wenn man übrigens die in (§. 13.) und (§. 15.) gewählten Zeichen beybehält, auch

$\mu \varrho (\mathfrak{M} + K + M + Pl + m) + \frac{s}{r} + r(m + Pl) = A$; $K R^2 \sin\delta + \mathfrak{M}\alpha^2 + r^2(M + m + Pl) = B$ ſetzt, ſo findet man den Schwung

$$h' = [(k R \sin\delta + r M - A - \mu\varrho\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2)(x - b) + rP(x^2 - b^2))(\mathfrak{B} + \tfrac{1}{2}\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4)] : [(B + \tfrac{1}{2}\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4) \times (\mathfrak{A} + \mu\varrho\pi\beta\gamma(\mathfrak{R}^2 - r^2))]$$

wo $\mathfrak{A} = A - \mu\varrho K$ und $\mathfrak{B} = B - K R^2 \sin\delta^2$ iſt.

Man ſchreibe zur Abkürzung

$$k R \sin\delta + r M - A = F$$
$$\mu\varrho\pi\delta(\mathfrak{R}^2 - r^2) = m$$
$$x - b = f$$
$$r P(x^2 - b^2) = p$$
$$\tfrac{1}{2}\pi\gamma(\mathfrak{R}^4 - r^4) = n;$$

ſo wird aus obiger Gleichung

$$h' = \frac{((F - \beta m) f + p)(\mathfrak{B} + \beta n)}{(B + \beta n)(\mathfrak{A} + \beta m)} \quad (24)$$

und hieraus findet ſich

$$\beta = \sqrt{\frac{(m(f\mathfrak{B} + h'\mathfrak{B}) + n(\mathfrak{A}h' - Ff - p))^2}{4 n^2 m^2 (h' + f)^2} + \frac{\mathfrak{B}(Ff + p) - h'\mathfrak{B}\mathfrak{A}}{n m (f + h')}} - \frac{m(f\mathfrak{B} + h'\mathfrak{B}) + n(\mathfrak{A}h' - Ff - p)}{2 n m (h' + f)}$$

Dieſer Ausdruck läßt ſich ſo einrichten, daß er ſich bequemer und durch Logarithmen rechnen läßt.

Man ſetze

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{B}(fF + p) - h'\mathfrak{B}\mathfrak{A}}}{n m (f + h')} = D \text{ und}$$

$$\frac{m(f\mathfrak{B} + h\mathfrak{B}) + n(\mathfrak{A}h' - Ff - p)}{2 n m (h' + f)} = L;$$

Nun

Nun ſuche man einen Winkel, deſſen Tangente $= \frac{D}{L}$ iſt; er heiſſe ψ; ſo wird

$$\beta = L\,(\sec\psi - 1) \text{ oder}$$
$$= \frac{L \sin v.\,\psi}{\cos\psi} \text{ oder auch}$$
$$= L \sec\psi \sin v.\,\psi.$$

Daß übrigens aus der Gleichung (24) für h′ ſich ein größter und kleinſter Werth ableiten laſſe, iſt für ſich klar.

Man ſetze zur weitern Abkürzung

$$F f \mathfrak{B} + p \mathfrak{B} = a$$
$$- m f \mathfrak{B} + F f n + p n = - b$$
$$m f n = c$$
$$\mathfrak{B} \mathfrak{A} = f$$
$$n \mathfrak{A} + B m = q \text{ ſo wird}$$
$$h' = \frac{a - b\beta - c\beta^2}{f + q\beta + nm\beta^2}$$

alſo für die geſuchten größten und kleinſten Werthe von h′ wird

$$\beta = \frac{cf + anm \pm \sqrt{(cf + anm)^2 + (bf + aq)(bnm - cq)}}{bnm - cq}$$

§. 27.

Um zu ſehen, ob und wie meine Theorie mit der Erfahrung übereinſtimmte, habe ich verſchiedene Verſuche angeſtellt, von welchen ich die genaueſten, die bey ſehr vielen Wiederhohlungen, mit ganz unbedeutendem Unterſchied, daſſelbe Reſultat lieferten, hierher ſetzen will.

Erſter Verſuch.

Ich ließ eine hölzerne Rolle mit einer ſtählernen Axe verſehen, und in ſelbiger feſtmachen. Dieſe hing ich zwiſchen zwey Meſſingplatten, worinn die Zapfen liefen, an einer

Wand auf. Ueber die Rolle ließ ich eine Schnur gehen, woran ich zwey hohle Cylinder befeſtigte, um nach Willkühr Gewichte zulegen und wegnehmen zu können. In der Nähe desjenigen Theils vom Seile, woran das leichtere Gewicht hing, ließ ſich ein kleiner Tragbalken auf und nieder ſchieben, über deſſen hervorſtehende zwey ſpitze Backen ein ſehr dünnes tannenes Stäbchen horizontal ſo aufgelegt war, daß es bey der leiſeſten Berührung herunter fallen mußte.

Bey Anſtellung eines jeden Verſuches ſchob ich den Tragbalken ſo lange hin und her, bis das leichtere Gewicht, das, nachdem das ſchwerere bereits zu Boden lag, wegen des Schwungs doch noch zu ſteigen fortfuhr, endlich das Stäbchen kaum berührte und abwarf.

Zugleich nahm ich, in Ermangelung einer Tertienuhr, eine gute Secundentaſchenuhr zu Hülfe, welche gerade 5 Schläge in einer Secunde machte. Hierdurch wurde ich in den Stand geſetzt, von 12 zu 12 Tertien mit Gewißheit, von 6 zu 6 aber durch ohngefähres Schätzen zu unterſcheiden.

Die Rolle mit der Welle wog $1\frac{1}{2}$ Loth Cöllniſch Markgewicht, der eine Cilinder wog 9 Loth, und dem andern gab ich $9\frac{3}{4}$ Loth Gewicht. Die Schnur war $7\frac{1}{4}$ Fuß lang und wog 1 Quent.

Der Halbmeſſer der Rolle, die Hälfte der Dicke der Schnur mitgemeſſen, war 1 Zoll 2 Linien Rheinländiſch Duodecimalmaas, der Halbmeſſer der Zapfen = $\frac{1}{4}$ Linie. Ließ ich nun das ſchwerere Gewicht aus einer Höhe von 5 Fuß herunter fallen, welches in einer Zeit von $4\frac{2}{5}$ Secunden geſchah, ſo ſtieg alsdann das leichtere noch auf 2 Zolle $1\frac{1}{2}$ Linie in die Höhe.

Zwey

Zweyter Verſuch.

Ich ſetzte dem Gewicht von 9 $\frac{3}{4}$ Loth noch $\frac{3}{4}$ Loth zu, und ließ es wiederum 5 Fuß tief fallen, welches nunmehr in Zeit von 2 $\frac{2}{5}$ Secunden geſchah. Das leichtere Gewicht von 9 Loth ſtieg, nachdem erſteres den Boden erreicht hatte, noch 4 Zoll 3 $\frac{1}{2}$ Linie hoch.

Dritter Verſuch.

Ich machte das eine Gewicht 12 Loth ſchwer, es fiel in $\frac{7}{5}$ Secu..`en zu Boden, und das leichtere von 9 Loth ſtieg alsdann noch 8 Zoll 7 Linien. Die Fallhöhe war ebenfalls 5 Fuß.

§. 28.

Um dieſe Verſuche mit der Theorie zu vergleichen, dienen die Formuln §. 12.

Für den 1ſten Verſuch iſt

$$\left.\begin{array}{l} M = 39 \\ m = 36 \\ \mathfrak{M} = 6 \end{array}\right\} \text{Quent.}$$

$$t = \tfrac{22}{5} \text{ Secunden.}$$

$$\left.\begin{array}{l} R = 14 \\ \varrho = \tfrac{1}{4} \\ x = 720 \\ b = 0 \end{array}\right\} \text{Linien.}$$

P, oder eine Linie von der Schnur iſt $= \frac{1}{1034}$ Quent, wofür ich, der leichtern Rechnung wegen, $P = \frac{1}{1000}$ Quent nahm.

Die Reibung fand ich ſo: Wenn zu beyden Seiten der Rolle 39 Quent gehängt wurden, ſo mußte $\frac{2}{7}$ Quent zugelegt werden, bis Bewegung zu erfolgen anfing. Das Nämliche geſchah, wenn anſtatt des zur Unterſuchung der Reibung genommenen ſehr dünnen Fadens die Gewichte an die für ſie beſtimmte 1 Linie dicke Schnur gehängt wurden. Da nun

nun das Verhältniß der Zapfen zur Rolle $= 13\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ oder $= 54 : 1$ war, und die Gewichte ſammt dem Seil zuſammen 85 Quent ausmachten; ſo fand ſich $\mu = \frac{54.2}{7.85.} = \frac{108}{595}$. Dies auf die Höhe der Rolle, mit Inbegriff der halben Schnurdicke reducirt, giebt $\frac{729}{4165}$, wofür ich $\mu = \frac{1}{6}$ nahm. Es war alſo $\frac{s}{r} = \frac{27}{4165}$; welches ich als unbedeutend auſſer Acht ließ.

Nach dieſen Beſtimmungen erhält man

$$A = \frac{82}{24} + 518 = 521\tfrac{1}{2}$$
$$B = 79$$
$$\mathfrak{A} = \frac{43}{24} + 36\tfrac{2}{7} \times 14 = 509\tfrac{1}{2}$$
$$\mathfrak{B} = 39\tfrac{2}{7}.$$

Es wird alſo

$$h' = \frac{((546 - 521\frac{1}{2})\,720 + 7258) - 39\frac{2}{7}}{79 \cdot 509\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{(49 \cdot 360 + 7258)\,550}{7 \cdot 79 \cdot 1019} = \frac{24898 \cdot 550}{553 \cdot 1019}$$
$$= 24{,}3012 \text{ Linien.}$$

Zieht man die von der Schwere der Schnur herrührende Veränderlichkeit der beſchleunigenden Kraft nicht in Rechnung, ſo iſt nach beſagtem (§. 12.) die Formul

$$h = \frac{(MR - A)^2}{RB^2}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\; gtt \text{ oder in Zahlen}$$

$$h = \frac{(\frac{49}{2})^2 \cdot 39\frac{2}{7} \cdot 2250 \cdot 484}{14 \cdot 6241 \cdot 509\frac{1}{2} \cdot 25} = \frac{2401 \cdot 275 \cdot 1125 \cdot 484}{98 \cdot 6241 \cdot 1019 \cdot 25}$$
$$= 23{,}084.$$

So findet man

für den 2ten Verſuch } $h' = \begin{cases} 51{,}8473 \\ 101{,}146 \end{cases}$
— — 3ten — }

§. 29

§. 29.

Vierter Verſuch.

Ich nahm die Schnur mit den Gewichten von der Rolle, ſchlug einen kleinen Stift parallel mit ihrer Welle in die Rolle ein, und bog ihn, daß er in dieſer Richtung genau mit dem Rand der Rolle gleich ſtand. Gegen über machte ich ein kleines Gegengewicht, damit die Rolle wieder wie vorher allenthalben gleich ſchwer war. Nun legte ich die Zapfen in ihre Lager, und ließ ein bleiernes Parallelepipedum, das gerade ſo ſchwer wie die Rolle mit der Welle war, aus der Höhe des Halbmeſſers der Rolle auf den mit der Axe derſelben in eine Horizontalebene gebrachten Stift ſo fallen, daß das Blei in der Richtung ſeines Schwerpunctes auf den Stift traf. Die Rolle lief durch den erhaltenen Stoß, wenn das Parallelepipedum recht traf, nach einem Mittel aus mehreren Beobachtungen $13\frac{1}{2}$ mal um, ehe ſie ſtill ſtand.

Fünfter Verſuch.

Ich ließ das Stück Blei aus der Höhe des Durchmeſſers auf den Stift fallen, hierauf machte die Rolle 26 Umgänge, bevor ſie ſtille ſtand.

Sechster Verſuch.

Wenn ich das Stück Blei aus der dreyfachen Höhe des Halbmeſſers auf den Stift fallen ließ, ſo machte die Rolle $40\frac{1}{2}$ Umgänge.

§. 30.

Um auch dieſe Verſuche mit der Theorie zu vergleichen, hat man aus der Fundamentalformul (§. 7.) weil $Q = 0$ $\mathfrak{M}\alpha^2 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{M}\,R^2$ und $\mathfrak{A} = \mu\,\varrho\,\mathfrak{M}$ iſt,

$$h = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{\mathfrak{M}\,R}{2\,\mu\,\varrho\,\mathfrak{M}} = \frac{c^2}{4g} \cdot \frac{R}{2\,\mu\,\varrho}$$

Wenn nun M aus der Höhe des Radius fällt, ſo iſt $\frac{c^2}{4g} = R$; alſo wäre $h = \frac{R^2}{2\mu\varrho}$, wenn M im Fallen der Rolle ſeine ganze Geſchwindigkeit mittheilte. Dieſes geſchieht aber nicht, man hat daher erſt die der Geſchwindigkeit der Rolle zukommende Fallhöhe gehörig zu ſuchen.

In der kleinen Zeit t ſey der Maſſe M Geſchwindigkeit, wenn ſie den Stift an der Rolle forttreibt, $= v$; der Rolle Winkelgeſchwindigkeit aber $= w$; und die Gewalt, womit M gegen die Rolle drückt, $= P$; ſo iſt

$$dv = -\frac{2gPdt}{M} \text{ und } dw = \frac{2gRPdt}{\frac{1}{2}MR^2}$$

folglich $v = -\frac{2gPt}{M} + \text{Const.}$ und $w = \frac{4gPt}{MR} + \text{Const.}$

Weil nun die Maſſe M im Fallen, bey der Berührung des an der Rolle befeſtigten Stiftes, ſchon eine Geſchwindigkeit $= c$ hat; ſo iſt $v = c$ für $-\frac{2gPt}{M} = 0$; alſo

$$v = c - \frac{2gPt}{M}; \text{ für } w \text{ aber iſt Const.} = 0.$$

Beyde Gleichungen auf $2gPt$ gebracht, giebt

$$c - v = \tfrac{1}{2} Rw.$$

Es iſt aber für unelaſtiſche Körper, wie hier anzunehmen iſt, der Stoß zu Ende, wenn $v = Rw$ wird; alſo

$$c - Rw = \tfrac{1}{2} Rw$$

und die Geſchwindigkeit der Rolle nach dem Stoß, oder

$$Rw = \tfrac{2}{3} c.$$

Wenn man dieſen Werth in der Fundamentalgleichung (§. 7.) für c ſubſtituirt; ſo kommt

$$h = \frac{4c^2R}{4g \cdot 9 \cdot 2\mu\varrho} = \frac{4R^2}{18\mu\varrho} = \frac{2R^2}{9\mu\varrho};$$

Die

Die Anzahl Umdrehungen der Rolle, die in h ſtecken, ſey U, ſo iſt

$$2 \pi R : 1 = h : U;$$ alſo hat man

$$U = \frac{R}{9 \mu \varrho \pi};$$

Für den Fall von M

1.) aus der Höhe des Halbmeſſers, iſt

$$U = \frac{14}{9 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3,14} = 11 \tfrac{4}{5}$$ Umgänge.

2.) aus der Höhe des Durchmeſſers, iſt

$$U = 23,7.$$

3.) aus der Höhe des dreyfachen Halbmeſſers, iſt

$$U = 35,6.$$

§. 13.

Siebenter Verſuch.

Hierauf ſetzte ich durch zwey Gewichte an einer Schnur ein Rad mit einer Welle in Bewegung, indem ich die Schnur verſchiedenemal um letztere wickelte.

Die Maaſe waren folgende

R, oder der Halbmeſſer des Rades mit Inbegriff der halben Schnurdicke war	6 Zoll	5 Linien	
r, oder der Halbmeſſer der Welle =	1 —	; —	
ϱ, oder der Halbmeſſer der Zapfen =	; —	1 —	
H, oder die Höhe des Radkranzes =	1 —	2 —	
D, oder ſeine Dicke . . =	; —	8 —	
L, oder die Länge der Welle bis zu den Zapfen . =	18 —	; —	
$\mathfrak{R}$, oder die Länge der drey Aerme (Speichen) vom Umfang der Welle an bis zum Radkranz, alſo R-H-r =	4 —	3 —	
$\mathfrak{r}$, oder von der Axe der Welle an bis zum Radkranz = $\mathfrak{R}$ + r =	5 —	3 —	

Das

Das Gewicht von Rad und Welle war 2 ℔ 19 Loth $1\frac{1}{2}$ Quent.

Die Schnur war $\frac{3}{4}$ Linien dick und überhaupt 10 Fuß lang, welche $1\frac{1}{4}$ Quent wogen.

Das auf der einen Seite der Welle herabhängende ſchwerere Gewicht betrug 12 Loth, das leichtere, welches durch den Fall des erſteren auf der andern Seite der Welle aufgewunden wurde, war = 9 Loth. Letzteres ſtieg, nachdem Erſteres durch eine Höhe von 5 Fuß gefallen war, und den Boden erreicht hatte, nach einem mittleren Durchſchnitt aus 24 Beobachtungen, noch 8 Zoll 3 Linien, welches in Zeit von $19\frac{3}{5}$ Secunden geſchah.

Achter Verſuch.

Ich legte dem Gewicht von 12 Loth noch 1 Loth zu, alles Andere blieb ungeändert. Nun fiel das ſchwerere Gewicht aus der vorigen Höhe von 5 Fuß in Zeit von $12\frac{1}{10}$ Secunden zu Boden, und das leichtere ſtieg hierauf noch 13 Zoll 5 Linien.

Neunter Verſuch.

Ich legte dem ſchwereren Gewicht weiter 1 Loth zu, es fiel aus der vorigen Höhe in Zeit von 10 Secunden, und das leichtere ſtieg alsdann noch 14 Zoll 1 Linie.

Zuletzt unterſuchte ich die Reibung und Steifigkeit der Schnur. Für erſtere fand ſich ſehr nahe $\mu = \frac{1}{6}$, die letztere war für nichts zu rechnen.

§. 32.

Um zu ſehen, wie dieſe Verſuche mit der Theorie übereinſtimmen, ſind vorher die Momente der Trägheit gehörig auszumachen.

Der

Der Inhalt der Welle, des Radkranzes und der Speichen oder Aerme iſt

$$\pi\, r^2 L + \pi D (R^2 - r^2) + 3 D^2 \mathfrak{R};$$

In Zahlen iſt

$\pi\, r^2 L = 3,14 . 144 . 216 = = 97666,56$
$\pi D (R^2 - r^2) = 3,14 . 8 (77)^2 - (63)^2 = = 49235,20$
$3 D^2 \mathfrak{R} = 3 . 64 . 51 = = 9792,00$

Summe $156693,76$

Da nun das Gewicht des Ganzen, wenn man 1 Loth $1\frac{1}{2}$ Quent für die Schwere der Zapfen abrechnet = 82 Loth iſt; ſo muß wiegen

1.) die Welle = 51,1102
2.) der Radkranz = 25,7655 } Loth
3.) die Speichen = 5,1243

Summe 82,0000

Und es iſt das Moment der Trägheit

1.) der Welle $= \frac{1}{2} . 51,1102 . 144 = = 3679,9344$
2.) d. Radkr. $= \frac{1}{2} . 25,7655 (5929 + 3969) = 127513,4595$
3.) der Aerme $= \frac{1}{3} . 5,1243 (\frac{1}{4} D^2 + r^2 + r^2 + r\,r)$
$= \frac{1}{3} . 5,1243 (16 + 3969 + 144 + 756) = 8344,0685$
4.) der Zapfen $= \frac{1}{2} \frac{3}{2} . 1 = = 0,7500$

Summe $= 139538,2124$

Die Formuln zur Berechnung ſind

1.) wenn die von der Schwere des Seils herrührende Veränderlichkeit der beſchleunigenden Kraſt mit in Rechnung gezogen wird,

$$h' = \frac{((r M - \mathfrak{A})(x - b) + r P (x^2 - b^2))\, B}{\mathfrak{B} A}$$

wo $\mathfrak{A} = \mu \varrho (\mathfrak{M} + M + m + P l) + r (m + P l)$
$\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \alpha^2 + r^2 (M + m + P l)$
$A = \mathfrak{A} - \mu \varrho M$
$B = \mathfrak{B} - r^2 M$ iſt.

2.)

2.) Wenn die Rechnung ohne den vom Seil herrührenden Beſchleunigungszuwachs geführt wird,

$$h = \frac{c^2}{4g}\,\frac{B}{A\,r} = \frac{(r\,M - \mathfrak{A})^2}{\mathfrak{B}^2\,A}\,B\,r\,gtt.$$

In Zahlen iſt für den ſiebenten Verſuch

$b = 0$; $\mathfrak{A} = 128,75$; $\mathfrak{B} = 142607,21$

$A = 126,75$; $B = 140879,21$; daher

$$h' = \frac{17200,8 \times 140879,21}{142607,21 \times 126,75}$$

$= 134,061$ Linien.

h hingegen iſt

$$\frac{(15,25)^2\ 140879,21 \times 12 \times 2250\ (19\tfrac{3}{5})^2}{(142607,21)^2 \times 126,75}$$

$= 131,935$ Linien.

So findet man

für den 8ten Verſuch, $h' = 169,60$, $h = 165,299$ Linien.

für den 9ten, $h' = 174,57$, $h = 171,23$ Linien.

§. 33.

Zehnter Verſuch.

Ich nahm das eine Gewicht ab, und ließ das andere 9 Loth ſchwere aus einer Höhe von 5 Fuß herunterſinken, und die Schnur ſich von der Welle loswinden. Das Rad machte, nachdem das Gewicht den Boden erreicht hatte, noch $52\frac{1}{2}$ Umgänge.

Eilfter Verſuch.

Ich that das Nämliche mit einem Gewicht von 12 Loth; nun machte das Rad $71\frac{3}{4}$ Umgänge.

Zwölfter Verſuch.

Mit einem Gewicht von 15 Loth erfolgten 84 Umgänge.

§. 34.

§. 34.

Die Formul zur Berechnung dieſer Verſuche iſt

$$h' = \frac{((rM - \mathfrak{A})(x - b) + rP(x^2 - b^2))B}{6,28\, r\, \mathfrak{B}\, A}$$

wo $\mathfrak{A} = \mu \varrho (\mathfrak{M} + M)$

$\mathfrak{B} = \mathfrak{M}\alpha^2 + r^2 M$

$A = \mu \varrho \mathfrak{M}$

$B = \mathfrak{M}\alpha^2$ iſt.

So findet man für den 10ten Verſuch

$$h' = \frac{((12 . 9 - 15,396)\, 720 + 6220,8)\, 139538,2}{6,28 \times 140834,2 \times 13,896 \times 12}$$

$$= \frac{72895,68 \times 139538,2}{6,28 \times 140834,2 \times 13,896 \times 12}$$

$= 68,775$ Umgänge.

Für den 11ten Verſuch } iſt $h' = 92,827$;
endlich für den 12ten — — } iſt $h' = 116,47$.

Daß dieſe Verſuche nicht ſo gut wie die übrigen mit der Theorie übereinſtimmen, daran iſt wahrſcheinlich der bey geſchwinder Bewegung größere Widerſtand der Luft und der Umſtand ſchuld, daß bey vermehrter Bewegung ſich die Unregelmäßigkeiten im Bau der Maſchine mehr äuſſern, und ihre Trägheit mehr Widerſtand leiſtet, als bey langſamer Bewegung. Onehin waren bey einem unverſehenen Fall des Rades auf die Erde die Zapfen aus ihrer Richtung gekommen, und ob ſie gleich wieder auf das ſorgfältigſte hergeſtellt wurden, ſo blieb doch bey geſchwinder Bewegung eine gewiſſe Ungleichheit des Gangs dem Gehöre merklich. Durch das Geſicht konnte man nichts entdecken, es muß alſo wohl das Rad oder die Welle auf einer Seite ſchwerer geweſen ſeyn, als auf der andern, wie wohl ſich hiervon, wenn man das leere Rad auf den Zapfenlagern langſam

umwendete, keine Spur wahrnehmen ließ. Eigentlich wäre aber zu dieſer Unterſuchung eine beſondere Maſchine erforderlich geweſen, welche die Reibung beynahe bis auf 0 vermindert hätte.

Der vorhin erwähnte Fall des Rades auf die Erde, veranlaßte mich indeſſen, den Schwung auch in dieſem Zuſtand zu unterſuchen.

Die Zapfen waren um $\frac{1}{4}$ Linie gewichen, denn das Rad ſtieg und ſenkte ſich beym Herumgehen um $\frac{1}{2}$ Linie.

Heißt man nun den Abſtand des Zapfens vom Mittelpunct der Welle δ; ſo iſt das Moment der Kraft $= (r + \delta)(M + Px)$ das Moment der Laſt aber $= (r - \delta)(m + P(l - x)$; alſo die beſchleunigende Kraft

$$\mathfrak{F} = \left[(r+\delta)(M+Px) - \mu(\varrho+\delta+\varrho-\delta)(\mathfrak{M}+M+m+Pl) - \frac{s}{r} - (r-\delta)(m+P(l-x)\right] : \left[\mathfrak{M}\alpha^2 + (M+Px)(r+\delta)^2 + (m+P(l-x))(r-\delta)^2\right]$$

Aus dieſer Gleichung findet ſich die Formul für h′ und mit ſolcher ſtimmten einige angeſtellte Beobachtungen gut überein.

II.

Verſuch einer neuen Theorie der Kurbel.

§. 1.

Die Kurbel iſt ein an den Zapfen einer Welle befeſtigter Hebel mit einer Handhabe. An kleinern Maſchinen iſt der Hebel gemeiniglich rundlich gebogen, und die Handhabe noch mit einem um ſelbige beweglichen Knopf verſehen, wie z. B. an einer Caffeemühle, Drehorgel u. ſ. w.

Der Hebel heißt das Kurbelknie, die Handhabe aber der Griff. Bey größeren Maſchinen wird die Kurbel, welche übrigens bey kleineren auch Leyer heißt, Krummzapfen genannt.

Fig. 2 ſtellt ihn von A bis B vor. Der Theil A C iſt platt, wird in den Wellbaum eingelaſſen und darinn befeſtigt, er heißt der Bläuel. Der Theil C D dreht ſich in der Pfanne des Zapfenlagers und heißt der Wellzapfen. Der Theil E D iſt das ſchon erwähnte Kurbelknie, oder heißt bey den Handwerksleuten auch ſchlechtweg die Kurbel. E B endlich wird die Warze genannt. An dieſer hängt das Geſtäng zu Betreibung der Laſt. Fehlt an dem Krummzapfen A B die eigentliche Kurbel D E B, ſo wird A C D ein Bläuelzapfen genannt, fehlt auch der Bläuel, ſo hat man einen bloßen Wellzapfen C D. Iſt aber die Kurbel doppelt oder mehrfach, wie die punctirte Linie B F G H J umgebogen, ſo heißt ſie ein gekröpfter Haken. Der Endzapfen H J liegt alsdann auf einem beſondern Zapfenlager.

In

Inſonderheit braucht man das Wort **Krummzapfen** bey größeren Maſchinen, wenn an deſſen Handhabe oder der ſo genannten Warze, die Laſt angehängt iſt, wirkt aber die Kraft unmittelbar darauf, ſo daß durch die Handhabe die ganze Maſchine ihre Bewegung erhält, wie z B. eine Getraidefegemühle; ſo ſagt man nicht, ſie werde durch einen Krummzapfen getrieben, ſondern braucht dafür das Wort **Kurbel**.

§. 2.

Ihre Erfindung iſt ſehr alt, und wie man unter andern bey Hering de molendinis p. 103 ſehen kann, war ſie ſchon bey den Griechen und Römern in Anwendung. Der Name des Erfinders iſt aber unbekannt geblieben, vermuthlich wegen der Leichtigkeit, womit man auf ſie verfallen konnte, indem die bloße Betrachtung des Hebels auf die Idee von ihr verleiten mußte. So leicht indeſſen immer dieſes war, und ſo wenig Umſtände es erfordert, eine Kurbel an einer Maſchine anzubringen, ſo viel Schwierigkeit hat von jeher die ungleichförmige Wirkung ihres Gangs den Mathematikern verurſacht. Theils ſuchte man ſie dadurch zu vermindern, daß man gekröpfte Haken anbrachte, oder die Kurbel doppelt und mehrfach machte, um dem abwechſelnden Auf- und Niedergehen, oder Hin- und Herſchieben mehr Stetigkeit zu geben, theils nahm man hierzu die Schwungräder zu Hülfe. Andere ſuchten ſie durch die Anlage von beſondern Einrichtungen, die ſie für den wiederkehrenden Gang erſannen, ganz entbehrlich zu machen, und dieſen hierdurch der Gleichförmigkeit näher zu bringen.

Eins von dieſen Mitteln findet ſich in **Sturms Mühlenbaukunſt** angegeben, und beſteht aus einem auf einer Welle befindlichen halben Trillinge, deſſen Getriebſtäbe in einen über den Trilling paſſenden, inwendig auf beyden

Sei-

Seiten verzahnten Rahmen dergeſtalt eingreifen, daß der Rahmen, ſo wie ſich das halbe Getrieb zwiſchen ſelbigem umwendet, an einer Seite aufwärts und an der andern unterwärts gezogen wird.

Eine Abbildung von dieſer Einrichtung kann man in des Herrn Profeſſors Büſch Verſuch einer Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens, Fig. 93 nachſehen. Dieſer verdienſtvolle Mann ſagt aber von der erwähnten Einrichtung aus Erfahrung Folgendes:

„Es iſt gewiß, daß dieſe Einrichtung große Vortheile verſpricht, weil hier die Kraft einen beynahe immer gleichen Widerſtand gegen ſich hat, ſowohl wenn das Getrieb die Stange aufwärts, als wenn es ſie niederwärts bewegt. Indeſſen finden ſich doch in der Ausführung Hinderniſſe, wodurch ſie weniger, als man denken möchte, nützlich wird. Denn bey der Kurbel wird die Stange unmerklich aus einer Bewegung in die andere wiederkehrend geſetzt, hier aber muß ſie auf einmal, wenn ſie die Bewegung nach oben angenommen hat, wieder herunter gedrückt werden, und ehe ſie dieſem neuen Druck nachgiebt, ſtockt die Maſchine jedesmal eine Weile. Man kann ſich auch von einem Schwungrad nicht viel Hülfe zur Hebung dieſes Ungemachs verſprechen.“

Bey den Hamburgiſchen Waſſerkünſten hat man ſich einer andern und beſſern Einrichtung bedient, welche der angeführte Verfaſſer auch beſchreibt; nämlich es befinden ſich an einer Welle zween halbe Trillinge neben einander, deren Getriebe ſo vertheilt ſind, daß der eine leer geht, wenn der andere arbeitet, und umgekehrt. Ueber dieſem doppelten Halbtrilling iſt eine Rolle irgendwo feſtgemacht, an welcher zwo verzahnte Stangen, vermittelſt einer über die Rolle gehenden

henden Kette, wechſelsweiſe in die Stäbe der Halbtrillinge eingreifen, ſo daß die eine Stange niedergeht, während dem die andere heraufgezogen wird, und umgekehrt.

Auch durch ovale, oder vielmehr elliptiſche Scheiben hat man einen gleichförmigeren Gang, als ihn die Kurbel giebt, zu bewerkſtelligen geſucht. Sie werden an einer Welle befeſtigt, und durch ſie die Laſt wechſelsweiſe geſenkt oder gehoben, je nachdem die große oder kleine Axe der Ellipſe beym Umdrehen der Welle unter dem Wagebalken weggeht, der über der elliptiſchen Scheibe herliegt, an welchem Wagebalken die Laſt dann durch eine Stange befeſtigt iſt, und der ſie vermöge ſeiner Schwere, indem er ſich ſenkt, von ſelbſt wieder in die Höhe zieht, wann er durch die elliptiſche Scheibe gehoben, und mit dieſem Heben die Laſt geſenkt worden iſt.

Mehr von dieſer Einrichtung und noch einer andern mit ſogenannten Hebedaumen, findet man in Herrn Hofraths Karſten Lehrbegriff der geſammten Mathematik 5tem Theil §. 377. und §. 380. S. 610 u. f.

§. 3.

Auf die Erörterung der Frage: in wie weit man durch dergleichen Einrichtungen, deren leicht noch mehrere namhaft gemacht werden könnten, ſeinen Endzweck erreicht, und den Mängeln, welchen die Anbringung einer Kurbel unterworfen iſt, abgeholfen habe? will ich mich hier nicht einlaſſen. Im Allgemeinen bemerke ich nur ſo viel, daß es bey jeder Maſchine immer hauptſächlich auf die Abſicht, oder den Endzweck derſelben ankomme, und bey der einen der Krummzapfen oder die Kurbel, bey der andern hingegen eine andere Einrichtung vorzüglicher ſeyn könne, keine einzige aber den Effect der übrigen in ſich vereinige oder vollkommen ſey, die Kurbel indeſſeu ihre ſchon ſo lang behaup-

tete

teke Stelle unter den nützlichſten und gebräuchlichſten Maſchinen wohl immer fort, und das zwar mit vollem Recht behalten werde.

Das Einfache iſt beym Maſchinenweſen in der Regel ſtets dem Zuſammengeſetzteren vorzuziehen, und dieſer Grund kann oft allein ſchon zureichen, die Kurbel ſtatt anderer kunſtreicherer Einrichtungen zu wählen. Sie vereinigt überdies eine ſehr ſichere und ſanfte Bewegung mit Haltbarkeit und Dauer. Bey den andern Einrichtungen hingegen, die ſie haben verdrängen; wenigſtens ihr den Rang ſtreitig machen ſollen, äuſſern ſich oft Gebrechen und Fehler, die ſehr bald durch neue Stücke erſetzt werden müſſen, des leicht möglichen Abglitſchens der Getriebſtäbe an den gezahnten Stangen und der weit größeren Reibung nicht einmal zu erwähnen.

§. 4.

Ueber die Theorie der Kurbel haben mehrere Mathematiker geſchrieben. Das Hauptſächlichſte ihrer Bemühungen in einer kurzen Skizze neben einander geſtellt zu ſehen, kann wohl nicht anders, als jedem Leſer intereſſant ſeyn, um die Grundſätze, von welchen man ausging, und die Anſichten, unter welchen dieſer Gegenſtand betrachtet worden iſt, gleichſam mit einem Blicke zu überſchauen. Dieſes wird um ſo leichter werden, da ich mich dabey blos auf drey Schriftſteller, Belidor, Karſten und Langsdorf einſchränken kann, indem die übrigen alle bis auf Käſtner den beyden Erſteren gefolgt ſind. Von des Letzteren Unterſuchungen aber kann ich nichts ſagen, da ſie mir nie zu Geſichte gekommen ſind, er ſoll jedoch nach ſeinem eigenen Geſtändniß, mit ſelbigen nicht aufs Reine gekommen ſeyn. Man ſehe Herrn Profeſſors Langsdorf Theorie des Krummzapfens.

§. 5.

§. 5.

Belidors Theorie iſt, dem Weſentlichen nach, folgende:

Die Kraft, welche zu Umdrehung der Kurbel erfordert wird, iſt nie gleich, ſondern bald größer bald kleiner, je nachdem die Kurbel dem horizontalen oder verticalen Stand am nächſten kommt. Es ſey (Fig. 3.) O B D E der Umfang, den der Kurbelgriff durchläuft, M K N L aber der Umfang des Rades, ſo iſt klar: Wenn der Kurbelgriff mit der Directionslinie der Laſt in die Verticallinie E Q fällt, ſo trägt die Kraft von der Laſt nichts, eben als wäre ſie am Mittelpunct C aufgehängt. Wird nun das Rad nach L N umgetrieben, ſo nimmt das Moment der Laſt ſo lange zu, bis der Quadrant E D beſchrieben iſt, von da nimmt es wieder ab, bis die Kraft, wenn die Kurbel in B kommt, von der Laſt abermals nichts trägt. Eben ſo verhält ſichs im andern Halbcircul B O E. Folglich erfordert die Kurbel die größte Kraft wenn ſie horizontal ſteht. Ihr Moment iſt alsdann C D. Q. Iſt ſie aber in der Lage C a; ſo iſt das Moment C F. Q. Zum Voraus geſetzt, daß ſich Q immer gleich bleibe. Bey dieſer unendlich ab- und zunehmenden Ungleichheit der Kraft muß man ihr mittleres Moment in Rechnung bringen. Man darf alſo nur den Schwerpunct des halben Circuls ſuchen, den die Kurbel durchläuft; ſo bekommt man einen Hebelsarm C S, der die mittlere Proportion für alle Perpendikel C F von E an bis B ausdrückt. Nun verhält ſich aber jeder Bogen zu ſeiner Sehne, wie der Halbmeſſer zur Entfernung des Schwerpuncts des Bogens vom Mittelpunct, daher auch der halbe Umfang zum Durchmeſſer wie der Halbmeſſer zur Entfernung des Schwerpuncts des halben Umfangs vom Mittelpunct.

Heißt alſo die Höhe des Kurbelknies r, der Umfang $2\pi r$, und der Schwerpunct x, ſo iſt

$$x = \frac{2r^2}{\pi r};$$

wofür man in der Ausübung $\frac{2}{3}r$ nehmen kann. Soll daher die Summe der ab- und zunehmenden Geſchwindigkeiten des Rades und der Laſt in Vergleichung gebracht werden; ſo darf man nur den Durchmeſſer B E für die uniforme Geſchwindigkeit der Kraft P annehmen; folglich beſtimmt die Gleichung Q. B E = P. K N L ſo wohl die Kraft als die Laſt.

§. 6.

Herr Hofrath Karſten leitet die Theorie des Krummzapfens aus der Lehre des Unendlichen ab, und bringt das nämliche Reſultat heraus. Er ſagt: Wenn die Kraft, welche die Kurbel treibt = P, der Winkel E C G = α und C E = r iſt; ſo wird das Moment der Kraft = r P; das der Laſt = $Q r \sin \alpha$, folglich für den Fall des Gleichgewichts $P = Q \sin \alpha$; alſo auch $P d\alpha = Q \sin \alpha\, d\alpha$. Hiervon iſt das Integral P Bog α = Q sin. vers α. In dem Augenblick, wo der Kurbelgriff G in B anlangt, hat alſo die Kraft P die Laſt Q um die Höhe E B = 2 r gehoben, indem ſie ſelbſt den Weg πr gleichförmig durchlaufen hat. Alſo iſt $P \pi r = 2 r Q$ und

$$P = \frac{2Q}{\pi}.$$

§. 7.

Herr Profeſſor Langsdorf folgte in ſeinen älteren Schriften, ſelbſt noch im erſten Band ſeiner Maſchinenlehre, den nämlichen Grundſätzen. Nachher änderte er aber

ſeine

ſeine Meinung, und betrachtete die Sache aus einem andern Geſichtspunct. Er ſchloß im 2ten Band der Maſchinenlehre ſo:

Wenn derjenige Theil der Laſt, deſſen ſtatiſches Moment unveränderlich iſt, (z. B. die Reibung an den Wellzapfen, woran ſich die Kurbel befindet), auf die Entfernung der Warze von der Umdrehungsaxe gebracht, q heißt, der übrige Theil der Laſt aber, deſſen Moment ſich mit der Umdrehung der Warze ändert, gleichfalls auf die Warze gebracht, = Q; die Kraft auf eben dieſe Stelle gebracht, = P; die mit Q verbundene Maſſe, gehörig reducirt, = $\mathfrak{Q}$, und die mit P verbundene Maſſe, nach gehöriger Reduction, = $\mathfrak{P}$ geſetzt wird; ſo hat man die beſchleunigende Kraft für jeden Winkel α d. h. für jede Stelle der Warze, die von der, wo ſie das ſtatiſche Moment von Q = o giebt, verſchieden iſt,

$$f = \frac{P - q - Q \sin\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} (\sin\alpha)^2}.$$

Setzt man die Geſchwindigkeit, welche die Warze für jeden Winkel α hat = c, und die zu c gehörige Höhe = v; ſo hat man

$$f : 1 = d\,v : d\,r\,\text{Bog}\,\alpha;$$

wenn der Arm des Krummzapfens, oder die Höhe des Kurbelknies r heißt und Bog α für den Halbmeſſer = 1 ausgedrückt wird. Alſo

$$f = \frac{d\,v}{r\,d\,\text{Bog}\,\alpha} \text{ und}$$

$$\frac{P - q - Q \sin\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} (\sin\alpha)^2} = \frac{d\,v}{r\,d\,\text{Bog}\,\alpha} \quad (\mathfrak{D})$$

Hieraus findet er v durch eine unendliche Reihe, und zieht aus dem erhaltenen Werthe verſchiedene Schlußfolgen,

von

von welchen ich aber hier nichts erwähne, weil er in ſeinen nachher erſchienenen **Grundlehren der mechaniſchen Wiſſenſchaften** die ganze Rechnung, als unrichtig geführt, zurück nimmt, anders anſtellt, und nachdem er zur Abkürzung m für $\frac{Q}{P-q}$, auch n ſtatt $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}$ geſetzt hat, folgendes Reſultat aus der Gleichung (D) findet:

$$v = \frac{(P-q)r}{\mathfrak{P}}\left(\frac{\text{Bog. Tang }(\tang \alpha \sqrt{1+n})}{\sqrt{(1+n)}}\right.$$

$$\left. + \frac{m}{2\sqrt{(1+n)n}} \left(\text{Lg. nat. } \frac{\left(1+\cos\alpha\sqrt{\frac{n}{1+n}}\right)\left(1\pm\sqrt{\frac{n}{1+n}}\right)}{\left(1-\cos\alpha\sqrt{\frac{n}{1+n}}\right)\left(1\mp\sqrt{\frac{n}{1+n}}\right)}\right)\right) + \frac{C^2}{4g}$$

wo C diejenige Geſchwindigkeit der Warze, die ſelbige für $\sin\alpha = 0$ hat, und g die Fallhöhe für 1 Secunde bedeutet. Statt $\tang \alpha$ kann nun

$$\pm \frac{\sin\alpha}{\sqrt{(1-\sin\alpha^2)}}$$

und ſtatt $\cos\alpha$ kann

$$\mp \sqrt{1-\sin\alpha^2}$$

geſchrieben werden; überhaupt gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $\cos\alpha$ entweder bejaht oder verneint iſt.

„Setzt man, ſo fährt Herr Profeſſor Langsdorf weiter fort,

$$\frac{P-q}{Q} \text{ ſtatt } \sin\alpha;$$

ſo erhält man den Werth für die Höhe, welche der kleinſten Geſchwindigkeit der Warze zugehört. Der ſo herauskommende Werth der mit

$$\frac{P-q}{\mathfrak{P}}r$$

mul-

multiplicirten Größe heiſſe — $\mathfrak{X}$ ſo wird die der kleinſten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe

$$= - \frac{P-q}{\mathfrak{P}} r \mathfrak{X} + \frac{C^2}{4g};$$

oder auch, wenn t die Zeit eines halben Umgangs iſt,

$$= - \frac{P-q}{\mathfrak{P}} r \mathfrak{X} + \frac{\pi^2 r^2}{4 g t^2};$$

Soll daher die Bewegung der Fortdauer fähig ſeyn; ſo muß

$$t < \tfrac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{P} r}{g(P-q)\mathfrak{X}}} \text{ ſeyn.}$$

Dieſes iſt demnach die Bedingung, unter welcher die Maſchine ihre Bewegung beſtändig fortſetzen kann, oder eines Beharrungsſtandes fähig iſt.“

Hierauf ſagt er weiter:

„So intereſſant indeſſen die vorſtehenden Sätze ſind, ſo wenig ſind ſie doch dazu geſchickt, einen brauchbaren Ausdruck für die Ueberwucht daraus herzuleiten, und ich ſehe mich daher aufs neue genöthigt, für die Ausübung bey einer Näherungsmethode ſtehen zu bleiben.“

Vermöge dieſer ſucht er nun den mittleren Werth für $\sin \alpha^2$, nimmt $0,637\, Q$ als mittleren Werth für $Q \sin \alpha$ an, findet ſo die beſchleunigende Kraft

$$f = \frac{P - q - 0,637\, Q}{\mathfrak{P} + 0,424\, \mathfrak{Q}}$$

und ſchließt das Capitel mit den Worten:

„Ueberhaupt erhellet hieraus, daß die Theorie des Krummzapfens noch keinesweges vollendet iſt.“

§. 8.

§. 8.

Kurze Zeit nach der Herausgabe der Grundlehren der mechaniſchen Wiſſenſchaften erſchien von Herrn Profeſſor Langsdorf ein eigenes kleines Tractätchen über den Krummzapfen, unter dem Titel: Thèorie des Krummzapfens, ein bisher noch nicht aufgelößtes Problem, in aller Schärfe erwieſen, und in einer ſehr einfachen Formul dargeſtellt. Hierin ſagt er:

Er habe dieſen Gegenſtand nochmals unterſucht, und lege nun die Reſultate dieſer Unterſuchung aufs neue vor. Seine Grundſätze ſind folgende;

Wenn die Warze mit der Geſchwindigkeit c in ω (Fig. 4.) angekommen iſt, und nach a, b, c.. fortgeht, ſo ſey ω e a ein unbeſtimmter aber ſpitzer Winkel, $= \mu$. Alsdann iſt für die Stelle a das ſtatiſche Moment der Laſt $Q + q = Qr \sin \mu + r q$; das der Kraft aber iſt $= r P$. Macht man alſo $P = Q \sin \mu + q$; ſo hat die Kraft während der Bewegung von ω bis a beſtändig Ueberwucht, bis ſolche in dem Augenblick, da die Warze in a ankommt, $= 0$ wird. Die Geſchwindigkeit nimmt alſo von ω bis a beſtändig zu, nur immer weniger und weniger, je näher ſie der Stelle a kommt, weil die Ueberwucht immer kleiner und kleiner wird. Alſo hängt die Fortdauer der Zunahme der Geſchwindigkeit von der Größe des ſpitzen Winkels μ ab. So kann man daher der Forderung, daß die Geſchwindigkeit bis zu $\omega\ \alpha = 80°$ wachſen ſolle, dadurch Genüge thun, daß man $P = Q \sin 80° + q$ oder $= 0{,}9848\ Q + q$ nimmt. Hierauf wird die Ueberwucht eine Zeitlang verneint, und die Geſchwindigkeit der Warze nimmt ab, bis zur Stelle c, wenn $bc = ba$ und $\omega\, e\, b = 90°$ iſt. So wechſelt dann bejahte und verneinte Ueberwucht, und mit ihr geſchwindere und langſamere Bewegung der Warze beſtändig ab.

Weil

Weil aber die Geſchwindigkeit deſſelben von k bis a völlig ſo wie von c bis g zunehmend, hingegen von a bis c völlig ſo wie von g bis k abnehmend iſt, ſo kann kein Beharrungsſtand eintreten, wenn nicht der Wachsthum von k nach a und von c nach g der Abnahme von a nach c und von g nach k gleich iſt. Es muß alſo für die Bedingung des Beharrungsſtandes auch die Zunahme der Geſchwindigkeit von k bis a, der Abnahme von a bis c gleich ſeyn. Letzteres kann aber nur dann eintreten, wenn $ka = ac$ iſt, folglich muß für den Beharrungsſtand $\omega a = ab = \frac{1}{2} \omega ab$ oder $\mu = 45°$ ſeyn. Demnach hat man für den Beharrungsſtand $P = Q \sin 45 + q$, oder $P = 0,707\, Q + q$. Aus dieſer für die Theorie des Krummzapfens nun gefundenen ganz einfachen Formul ſchließt Herr Profeſſor Langsdorf weiter:

A) daß es auf Maſſe des Rades und der Laſt gar nicht ankomme, und daß dieſe auf das Verhältniß zwiſchen Kraft und Laſt gar keinen Einfluß haben, woferne Kraft und Laſt an ſich ungeändert bleiben.

B) daß es unrichtig ſey, bey Maſchinen mit einem Krummzapfen $P = 0,637\, Q + q$ zu ſetzen, indem man vielmehr $P = 0,707\, Q + q$ ſetzen müſſe.

C) daß alſo der ungleichförmige Gang der Warze die nachtheilige Folge habe, daß der Effect um den 10ten Theil vermindert werde, weil

$$\frac{P - q}{0,637} : \frac{P - q}{0,707} \text{ beynahe } = 10 : 9 \text{ iſt,}$$

und

D) die Kraft, wegen der erforderlichen Ueberwucht, um

$$\frac{0,07}{0,637 + \frac{q}{Q}}$$

größer ſeyn müſſe, als ſie bey gleichförmiger Bewegung ſeyn dürfe.

§. 9.

§. 9.

Nach dieſer kurzen Darſtellung der bisherigen Theorien über den Krummzapfen, trage ich nunmehr die meinige vor.

Die Kraft wirkt auf die Kurbel entweder unmittelbar oder mittelbar. In letzterem Fall iſt ihr Endzweck, krummlinigte oder Circulbewegung mit geradelinigter zu verbinden, und dieſe geradelinigte Bewegung iſt entweder vertical oder horizontal. Es verſteht ſich übrigens, daß beyde Wörter nicht in völliger Schärfe gelten, denn bey einem ins Feld ſchiebenden Geſtänge z. B. kann die zu wältigende Laſt in einem ziemlichen Thale oder auf einer beträchtlichen Anhöhe liegen. In anderer Rückſicht iſt die Kurbel entweder einfach oder mehrfach. Alle dieſe Fälle verdienen ihre eigne Betrachtung.

§. 10.

I.) Der erſte Fall, oder wenn die Kraft unmittelbar auf die Kurbel wirkt, kann nicht anders Statt finden, als wenn ſie von Menſchen umgetrieben wird. Dies geſchieht durch ein abwechſelndes Schieben, Ziehen und Heben.

Geſetzt ein Menſch wirkte nur durch bloſes Schieben und Ziehen auf die Kurbel, ſo würde man die Kraft durch P sin α, oder P cos α, je nachdem man in Fig. 3. den Winkel C E G oder a C D $= \alpha$ ſetzte, ausdrücken können. Die Kraft würde alsdann zweymal $= 0$, nämlich für $\angle \alpha = 0$ und $= 180^\circ$, (oder auch $= 90^\circ$ und $= 270^\circ$)

Weil aber der Arbeiter beym Herumführen der Kurbel auch hebt, ſo läßt ſich das ſtatiſche Moment der Kraft durch keine trigonometriſche Linie mehr ausdrücken, und wird nie $= 0$, ſondern behält in jeder Lage immer noch eine gewiſſe

Größe. Welche? das hängt von der Größe des Arbeiters, und von dem höheren oder niedrigeren Stande des Kurbelgriffs gegen die vortheilhafteſte Stellung ſeines Körpers ab.

Meines Wiſſens ſind darüber noch keine Erfahrungen geſammlet, wenigſtens nicht bekannt gemacht worden. Unter dieſen Umſtänden bleibt, ſo lange bis man genauere Verhältniſſe kennt, nichts übrig, als ein ungefähr zutreffendes mittleres Moment aufzuſuchen.

Wenn (Fig. 4.) der Kurbelgriff in b ſteht, und der Arbeiter nun Hand anlegt, ſo wird die Direction ſeines Schubs am natürlichſten nach d gehen, weil er ſo mehr Kraft anwenden kann, als wenn er bey b nach der Tangente auf b, folglich gerade über ſich hübe. Auch in c wird die Richtungslinie des Schubs gewiß eher nach d, als nach der Tangente auf c gehen, weil überhaupt die Circulbewegung für den Menſchen unbequem iſt. Steht nun der Kurbelgriff in d, ſo wird aus der nämlichen Urſache die Direction des Zugs nach f gehen. Von f aus wird der Arbeiter nach ω, und von ω endlich wiederum nach b ziehen.

Alle dieſe Directionslinien werden folglich einem im Circul beſchriebenen Viereck nahe kommen, und der auf deſſen Seite aus dem Mittelpunct e gezogene Perpendikel = e x den mittlern Hebelsarm für die Kraft vorſtellen können. Heißt nun die Höhe des Kurbelknies r, ſo wird das mittlere Moment $= P\,r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707\,r\,P$.

Herr Profeſſor Langsdorf nimmt es im 2ten Theil ſeiner Maſchinenlehre §. 111. S. 253 zu 0, 818 r P an; ſeine Zahl iſt das Mittel zwiſchen r und 0, 637 r, wobey er 0, 637 r P für das mittlere ſtatiſche Moment der Kraft hält, wenn ſelbige ſtets nach einerley Richtung wirkte, das aber eine irrige Vorausſetzung iſt, wie nachher erwieſen werden wird.

§. 11.

§. 11.

II.) Wenn die Laſt der Kurbel angehängt iſt, und durch ſie in verticaler Richtung auf und nieder gehoben wird.

Dieſes geſchieht vermittelſt eines ſo genannten Geſtänges. Wäre die Tiefe, wo die Laſt, z. B. ein Druckpumpenwerk, auf und nieder geführt werden ſoll, nicht ſo beträchtlich, daß der größte Winkel, um welchen das Umdrehen des Kurbelknies die Stange aus der verticalen Richtung bringt, in der Ausübung für nichts zu achten wäre; ſo würde es gemeiniglich nicht der Mühe werth ſeyn, ein Geſtäng anzulegen, ſondern man würde auf andere Art ſeine Abſicht zu erreichen ſuchen. Dieſer Umſtand rechtfertigt das Verfahren der practiſchen Schriftſteller, den beſagten Winkel ganz auſſer Acht zu laſſen. Sollte indeſſen ja ein Fall vorkommen, wo die größte Schärfe der Rechnung angewandt werden müßte; ſo würde man, nach der Zerlegung der Kräfte, nur ſtatt der Laſt Q, alsdann $Q \cos \beta$ ſchreiben dürfen, wo β den Winkel bedeutet, um welchen ſich die verticale Lage der Stange beym Umdrehen der Kurbel ändert. Ich werde die Laſt ſtets durch Q bezeichnen, worunter man nöthigen Falls auch $Q \cos \beta$ verſtehen kann.

§. 12.

Oben iſt ſchon erwähnt worden, daß wenn die Laſt durch ein Geſtäng der Kurbel angehängt wird, alsdann ſich krummlinigte Bewegung mit geradelinigter verbinde, und man findet offenbar auch beym erſten Blick, daß während der angegriffene Punct der Kraft (z. B. ein Waſſerrad, an deſſen Welle ein Krummzapfen befindlich iſt) den halben Umfang durchläuft, während deſſen durchläuft die Laſt den Durchmeſſer der Kurbeldrehung. Folglich kommt

auch die Laſt jedesmal durch den Querſinus, während deſſen die Kraft den diesem Querſinus zugehörigen Bogen durchläuft. Heißt nun die Geſchwindigkeit des Rades C, und ſein Halbmeſſer R, die Geſchwindigkeit der Laſt an der Warze des Krummzapfens (welche nicht mit der Geſchwindigkeit der Warze zu verwechſeln iſt) aber c, und die Höhe des Kurbelknies r; ſo hat man

$$C : c = R \text{ Bog } \alpha : r \sin. v \text{ oder}$$

$$c = \frac{C\, r \sin. v. \alpha}{R \text{ Bog } \alpha}$$

Behandelt man dieſen Ausdruck nach der Lehre vom Größten und Kleinſten; ſo erhält man

$$\text{Bog. } \alpha = \frac{\sin. v. \alpha}{\sin. \alpha} = \text{cosec. } \alpha - \text{cotang. } \alpha;$$

und dieſes iſt ein Kleinſtes, weil die zweyte Differentiation einen poſitiven Werth giebt. Es iſt aber Bog. α = cosec. α — cotang. α, blos nur in dem einzigen Falle, wenn $\angle \alpha = 0$ iſt. Hieraus folgt, daß für $\alpha = 90°$ die Geſchwindigkeit der Laſt am größten ſeyn müſſe.

Von dieſer Wahrheit überzeugt die nachſtehende Tabelle zugleich durch den Augenſchein. Es iſt nämlich

für einen Bogen von	0	Graden, c =	0
— — — —	10	—	= 0,08704 $\frac{Cr}{R}$
— — — —	20	—	= 0,17277 $\frac{Cr}{R}$
— — — —	30	—	= 0,25588 $\frac{Cr}{R}$
— — — —	40	—	= 0,33511 $\frac{Cr}{R}$
— — — —	50	—	= 0,40933 $\frac{Cr}{R}$
— — — —	60	—	= 0,47747 $\frac{Cr}{R}$
— — — —	70	—	= 0,53856 $\frac{Cr}{R}$
— — — —	80	—	= 0,59181 $\frac{Cr}{R}$
— — — —	90	—	= 0,63662 $\frac{Cr}{R}$

§. 13.

§. 13.

In Anſehung der Bögen über 90° tritt ein beſonderer Umſtand ein, welcher zuvor einer Erörterung bedarf.

Aus der Gleichung

$$c = \frac{Cr\ \sin.\ v.\ \alpha}{R\ \text{Bog}\ \alpha} = \frac{Cr}{R}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\text{Bog}\ \alpha}\right)$$

folgt für die Bogen über 90°

$$c = \frac{Cr}{R}\left(\frac{1+\cos\alpha}{\text{Bog}\ \alpha}\right).$$

Wenn man nun, ohne weiter über die Entſtehung und Natur dieſer Gleichung ſich zu bekümmern, fortrechnen wollte; ſo würde man finden, z. B.

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } \angle\alpha = 120^\circ;\ c = 0{,}716 \\ \text{— — } 180;\ c = 0{,}637 \\ \text{— — } 270;\ c = 0{,}212 \\ \text{— — } 360;\ c = 0{,}159 \\ \text{Für } \angle\alpha = 1^\circ \text{ aber wäre} \\ \quad c \text{ plötzlich wieder} = 0{,}0009 \end{array}\right\} \frac{Cr}{R}$$

Man ſieht von ſelbſt, daß alles dieſes nicht Statt haben kann. Denn wer annehmen wollte, die Geſchwindigkeit der Laſt ſey für $\angle\alpha = 180^\circ = 0{,}637\ \frac{Cr}{R}$; müßte eben das für $\angle\alpha = 0^\circ$ behaupten, weil, ſo wie die Kraft den halben Umfang durchlaufen hat, bey ihrem ferneren Fortſchreiten nun die Laſt rückgängig wird, weshalb die Abmeſſungen ihrer Geſchwindigkeit jetzt von ihrem Endpunct zu zählen angefangen werden müſſen. Hierdurch aber wird der Anfangspunct zum Endpunct, alſo derjenige Bogen, welcher vorher = 0° war, nunmehr = 180°, folglich wäre die Geſchwindigkeit daſelbſt zugleich = 0 und $= 0{,}637\ \frac{Cr}{R}$.

Eben

Eben ſo würde ſie für 360° zugleich = 0 und = 0,159 $\frac{Cr}{R}$ ſeyn, das alſo Ungereimtheiten in ſich begreift.

Es iſt aber ganz unleugbar richtig, daß die Geſchwindigkeit der Laſt da = 0 ſeyn müſſe, wo ihr Weg anfängt, oder zu Ende iſt, welches bey 0° und 180° jedesmal der Fall iſt. Wenn nun hiermit die obige Formul nicht übereinzuſtimmen ſcheint; ſo kommt das blos von ihrer unrichtigen Anwendung her.

Bey einem gewiſſen anderen mechaniſchen Problem, nämlich: die Geſetze der Kräfte zu finden, wenn ſich die Schwere nach dem verkehrten Verhältniß der Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunct der Kräfte richtet, kommt ein ähnlicher Umſtand vor, wenn man aus der Gleichung für dieſes Geſetz die Frage beantworten ſoll: was wird erfolgen, wenn ein Körper über den Mittelpunct der Kräfte hinaus ſich bewegt?

Jens Kraft in ſeiner Mechanik erklärte die Sache auf keine genügende Art. Herr Profeſſor Tetens aber in ſeinen Zuſätzen zu Krafts Mechanik giebt von dergleichen Vorfällen beym algebraiſchen Calcul mit kurzen Worten den richtigen Geſichtspunct an, und ſagt:

„Um dieſe Schwierigkeiten zu vermeiden, iſt folgende Regel zu merken, von deren Wahrheit die aufmerkſame Betrachtung dergleichen Aufgaben, jeden Leſer belehren wird. Wird nämlich die eine oder die andere Größe verneint geſetzt, ſo müſſen alle übrigen zugleich verneint genommen werden. Wird dieſes nicht in Acht genommen, ſo iſt es kein Wunder, wenn alles unter ſich ſchlecht zuſammenhängt. ꝛc. Forſchen wir der Urſache dieſer wenigſtens ſcheinbaren Abweichung des Calculs weiter nach, ſo erhellet, daß ſie von der Zweydeutigkeit des

Zei-

Zeichens (—) herrührt, denn bald drückt dieſes Zeichen nur eine entgegengeſetzte Lage der Größen aus, ſo wie auch die Aenderung deſſelben in (+) die Aenderung dieſer Lage andeutet, bald bezeichnet es die der durch (+) ausgedruckten, entgegengeſetzte Rechnungsart. ꝛc. "

Man ſehe Jens Krafts Mechanik, deutſche Ueberſetzung von Steingrüber S. 73 bis 78. Auch Eulers daſelbſt angeführte Mechanik Th. 1 §. 272.

In gegenwärtig hier vorliegendem Fall müſſen demnach für die Winkel über 90° bey der entgegengeſetzten Lage der Coſinus auch die Bögen von der entgegengeſetzten Seite her, oder rückwärts zu zählen angefangen werden, alsdann hängt alles mit der Natur der Sache wieder gehörig zuſammen, die vorherigen Ungereimtheiten verſchwinden, und es erhellet zugleich, daß für die Bogen über 90° die Geſchwindigkeit der Laſt eben ſo bis auf 180° abnehme, wie ſie im erſten Quadranten zugenommen hat, daher die Laſt für die Winkel von 100° und von 80°, von 110° und von 70°, von 120° und von 60° ꝛc. einerley Geſchwindigkeit hat, wie ſolches die Fig. 5. ſehr deutlich vor Augen ſtellt; denn das Hin- und Hergehen der Laſt erfordert natürlicher Weiſe, daß ſich ihre Geſchwindigkeit an gleichen Stellen über und unter 90° auch gleich bleibe.

Hieraus fließt nun klar, daß die Geſchwindigkeit der Laſt nie über 0,637 von der Geſchwindigkeit der Kraft ſteigen, alſo

$$c = \frac{0{,}637\ Cr}{R}$$

ein Maximum und nicht die mittlere Geſchwindigkeit der Laſt ſeyn müſſe, wie Mehrere in ihren Lehrbüchern, unter Andern auch Herr Profeſſor Langsdorf, behaupten.

§. 14.

Soll die mittlere Geſchwindigkeit in Rechnung kommen, ſo muß ihr Werth durch die Integralrechnung aufgeſucht werden.

Der Coefficient von $\frac{Cr}{R}$ iſt alsdann

$$= \frac{\text{Summe aller Werthe von } \frac{\sin. v. \alpha}{\text{Bog. } \alpha}}{\text{Anzahl aller Werthe von } \frac{\sin. v. \alpha}{\text{Bog. } \alpha}}$$

Setzt man $\sin. v. \alpha = x$; ſo wird der dazu gehörige Bogen, oder

$$\alpha = \sqrt{2x}\,(1 + \tfrac{1}{12}x + \tfrac{3}{160}x^2 + \tfrac{5}{896}x^3 + \tfrac{35}{9432}x^4 + + + \text{rc.})$$

wovon man den Beweis, der hier zu weitläuftig wäre, in Hrn. Hofr. Kåſtners Anal. d. Unendl. §. 292. nachſehen kann. Demnach wird

$$\frac{\sin. v. \alpha}{\text{Bog. } \alpha} = \frac{x}{\sqrt{2x}\,(1 + \frac{1}{12}x + \frac{3}{160}x^2 + \frac{5}{896}x^3 + + + \text{rc.})}$$

Um die

$$\text{Summe aller Werthe von } \frac{\sin. v. \alpha}{\text{Bog. } \alpha} = S$$

zu erhalten, iſt dieſer Ausdruck noch mit dx zu multipliciren, und dann zu integriren. Man hat alſo

$$S = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x}\,(1 + \frac{1}{12}x + \frac{3}{160}x^2 + \frac{5}{896}x^3 + + + \text{etc.})}$$

Um die im Nenner vorkommende unendliche Reihe leichter behandlen zu können, will ich ſie in einen ihr beynahe gleichgeltenden Bruch verwandeln. Dieſer Bruch ſey

$$\frac{1 - \gamma x}{1 - \beta x}.$$

Nun

Nun giebt die wirkliche Diviſion

$$\frac{1-\gamma x}{1-\beta x} = 1 + (\beta-\gamma)\,x + (\beta-\gamma)\,\beta x^2 + \text{etc.}$$

Setzt man alſo $\beta - \gamma = \frac{1}{12}$; $(\beta-\gamma)\,\beta = \frac{3}{160}$; ſo wird $\gamma = \frac{17}{120}$, und $\beta = \frac{27}{120}$;

folglich hat man $\dfrac{1-\gamma x}{1-\beta x} = \dfrac{120-17x}{120-27x}$.

Dieſer Bruch weicht von der obigen Reihe für Bog. φ nur um ein ſehr Geringes ab. Der größte Werth nämlich von x, welcher zur Sprache kommt, iſt = 1, und für dieſen iſt der Ausdruck $\dfrac{120-17x}{120-27x}$ gegen den durch die Reihe für Bog 90° ſich ergebenden Werth erſt beym Coefficienten von x^2 um 0,00136 unterſchieden, und kleiner als ſie.

Statt des Werthes von S hat man alſo nunmehr

$$\int\frac{(120-27x)\,x\,dx}{(120-17x)\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{120-27x}{120-17x}\,dx\sqrt{x}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{2}}\int\frac{dx\sqrt{x}}{120-17x} - \frac{27}{\sqrt{2}}\int\frac{x\sqrt{x}\,dx}{120-17x}.$$

Drückt man den erſten Theil durch

$$A\int\frac{dx\sqrt{x}}{a-fx}$$

aus, und ſetzt über dieſes $\sqrt{x} = v$; ſo wird daraus

$$2A\int\frac{v^2\,dv}{a-fv^2}.$$

Die wirkliche Diviſion von $a - fv^2$ in $v^2\,dv$ giebt

$$-\frac{dv}{f} + \frac{a\,dv}{f\,(a-fv^2)}$$

Alſo

Alſo iſt nunmehr zu integriren

$$-\frac{2A}{f}\int dv + \frac{2Aa}{f}\int\frac{dv}{a-fv^2}.$$

Man zerlege den Nenner von

$$\frac{dv}{a-fv^2}$$

in ſeine einfachen Factoren, und ſetze

$$\frac{B\,dv}{\sqrt{a}+v\sqrt{f}} + \frac{C\,dv}{\sqrt{a}-v\sqrt{f}} = \frac{dv}{a-fv^2};$$ ſo wird

$$B = C = \frac{1}{2\sqrt{a}},$$ und

$$\frac{dv}{a-fv^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot dv}{\sqrt{a}+v\sqrt{f}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot dv}{\sqrt{a}-v\sqrt{f}}.$$

Um das zu integrirende Differential leichter zu überſehen, ſey $\sqrt{a} \pm v\sqrt{f} = z$; ſo wird ſelbiges

$$= \frac{1}{2\sqrt{af}}\int\frac{\pm dz}{z}.$$

folglich iſt das Integral

$$= \frac{Aa}{f\sqrt{af}}\text{Log. nat.}\left(\frac{\sqrt{a}+v\sqrt{f}}{\sqrt{a}-v\sqrt{f}}\right) - \frac{2Av}{f} + \text{Const.}$$

Der zweyte Theil, oder

$$-\frac{27}{\sqrt{2}}\int\frac{x\sqrt{x}\,dx}{120-17x}$$

durch $-B\int\frac{x\sqrt{x}\,dx}{a-fx}$ ausgedrückt, und eben ſo behandelt, giebt zum Integral,

$$-2F\int\frac{v^4\,dv}{a-fv^2} = \frac{2B}{f}\int v^2 dv + \frac{2Ba}{f^2}\int dv - \frac{2Ba^2}{f^2}\int\frac{dv}{a-fv^2}$$

$$= -\frac{Ba^2}{f^2\sqrt{af}}\text{Log nat.}\left(\frac{\sqrt{a}+v\sqrt{f}}{\sqrt{a}-v\sqrt{f}}\right) + \frac{2Bv^3}{3f} + \frac{2Bav}{f^2} + \text{Const.}$$

Die

Die zwey Theile zuſammen genommen, und x wieder hergeſtellt, giebt

$$S = \frac{2\sqrt{x}}{f^2}(Ba - Af) + \frac{2Bx\sqrt{x}}{3f} - \frac{\sqrt{a}}{f^2\sqrt{f}}(Ba - Af)\,L.n.\,\frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx}}{\sqrt{a}-\sqrt{fx}}$$

$$= \frac{2Bx\sqrt{x}}{3f} + \left(\frac{Ba - Af}{f^2\sqrt{f}}\right)\left(2\sqrt{fx} - \sqrt{a}\,L.n.\,\frac{\sqrt{a}+\sqrt{fx}}{\sqrt{a}-\sqrt{fx}}\right)$$

$+$ Const.

Für $x = 0$ iſt $S = 0$ alſo Const $= 0$. Folglich war das Integral vollſtändig. Um den mittleren Werth für jeden Quadranten zu haben, iſt nun $x = 1$ zu ſetzen, S in Zahlen zu ſuchen, und ſodann durch die Anzahl aller Werthe von

$$\frac{\text{sin. v. } \alpha}{\text{Bog } \alpha}$$

zu dividiren. Dieſe iſt aber, weil alles in Theilen des sinus versus ausgedruckt iſt, $= 1$. Alſo erhält man zum Mittelwerth der Geſchwindigkeit der Laſt

$$= \frac{0{,}445116}{1} = 0{,}445116\,\frac{Cr}{R}$$

Eben dieſe Zahl ergiebt ſich, wenn man

$$\frac{120 - 27x}{120 - 17x}$$

wirklich dividiret, mit

$$\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2}}$$ multiplicirt, und integriret.

Alsdann nämlich wird

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{30}x^{\frac{5}{2}} - \frac{17}{5040}x^{\frac{7}{2}} - \frac{289}{777600}x^{\frac{9}{2}} - \frac{4913}{11404800}x^{\frac{11}{2}} - \text{etc}\right)$$

Die mittlere Geſchwindigkeit der Laſt fällt alſo auf 55° 7′ der Kurbelumdrehung im erſten Quadranten, im 2ten auf 124° 53′ u. ſ. w.

§. 15.

§. 15.

Um das mittlere ſtatiſche Moment zu erhalten, iſt die Summe aller Sinus im Quadranten durch ihre Anzahl zu dividiren.

Nennt man wiederum den Sinus versus $= x$; ſo wird der Sinus $= \sqrt{(2x - x^2)}$, alſo die Summe aller Sinus

$$\int dx \sqrt{(2x - x^2)}.$$

Hiervon iſt das Integral

$$\frac{(2+x)(2-2x)}{4} \sqrt{\frac{2-x}{x}} + \text{Bog. Tang.} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

wo ebenfalls die Conſtante wegfällt. Für $x = 1$ wird ſelbiges $=$ Bog. Tang. $1 = 0{,}7853981 6$.

Da nun die Diviſion durch die Anzahl aller dx im Quadranten ($= 1$) den gefundenen Werth nicht verändert, ſo iſt folglich der Mittelwerth aller Sinus im Quadranten $= 0{,}78539816$.

Wem das Aufſuchen des Integrals von $dx \sqrt{(2x - x^2)}$ zu beſchwerlich fällt, der kann den Mittelwerth aller Sinus im Quadranten auch ſo finden.

Das Integral

$$\int \frac{dx \sqrt{(2x - x^2)}}{\int dx}$$

iſt für den Quadranten

$$= \int \frac{dx \sqrt{(2x - x^2)}}{1}.$$

Wenn man alſo den Mittelwerth haben will, ſo conſtruire man über dem Halbmeſſer ein Rechteck, das dem Inhalt des Quadranten gleich iſt, und nehme die Höhe dieſes Rechtecks für den Mittelwerth, welcher $= \frac{1}{4}\pi$ iſt.

Oder

Oder mit andern Worten: Die Summe aller Sinus im Quadranten iſt ſeinem Inhalt gleich, $= \frac{1}{4} \pi r^2$; dieß dividirt mit der Anzahl aller Werthe, $= r$; giebt zum Mittelwerth, $= \frac{1}{4} \pi r$ wie zuvor, welcher Werth bey 51° 45′ eintritt.

§. 16.

Der Coefficient des mittleren ſtatiſchen Momentes iſt alſo vom Coefficienten der mittleren Geſchwindigkeit bey der Kurbel verſchieden, folglich auch überhaupt das mechaniſche Moment dem ſtatiſchen nicht allenthalben, ſondern nur in verſchiedenen Stellen gleich.

Die Sache verhält ſich nämlich folgender Geſtalt.

Wenn (Fig. 5.) die Warze des Krummzapfens in z ſteht, und jetzt die Bewegung anfängt; ſo iſt für dieſe Stelle ſowohl der Widerſtand der Laſt als ihre Geſchwindigkeit = o. Dreht ſich nun die Kurbel, ſo wächſt die Geſchwindigkeit der Laſt, und mit ihr zugleich der Widerſtand, aber beyde nicht für einerley Bogen um Gleichviel, ſondern letzterer nimmt Anfangs ſchneller zu als erſtere. Beym Bogen von 51° 45′ hat letzterer die Hälfte ſeines Wachsthums erreicht, die Geſchwindigkeit aber noch nicht, ſondern dies erfolgt erſt bey 55° 7′. Nachher wachſen zwar beyde fort bis zu 90°, aber die Geſchwindigkeit nimmt ſtärker zu als der Widerſtand der Laſt, bis ſie beym 90ſten Grad alle beyde ihre höchſte Stufe, deren ſie fähig ſind, zugleich erreichen, und nun im 2ten Quadranten, eben ſo in eben der Ordnung abnehmen.

§. 17.

Um wegen der Richtigkeit der Fundamentalgleichung (§. 12.) keinen Zweifel übrig zu laſſen, muß ich noch eines mir vorgekommenen Einwurfs gedenken. Man könnte nämlich ſagen: Die

Be-

Bewegung der Kraft und der Laſt ſind nicht von einerley Art, folglich läßt ſich in Anſehung ihrer nur für unendlich kleine Räume eine Vergleichung anſtellen. Man erhält alſo eigentlich nicht die Proportion (§. 12.), ſondern folgende:

$$dc : dC = d\,\text{sin. v.}\,\alpha : d\alpha;$$ das giebt nun

$$dc = \frac{dC \sin\alpha \, d\alpha}{d\alpha} = dC \sin\alpha;$$

und im Integral $c = C \sin\alpha$. Hieraus folgte dann zugleich, daß das mittlere mechaniſche Moment vom mittleren ſtatiſchen nicht verſchieden wäre.

Allein eine nähere Prüfung der Sache zeigt, daß dieſe Schlußfolge irrig ſey.

1.) Laſſen ſich allerdings auch ungleichartige Größen in ein Verhältniß bringen, und es iſt überhaupt nicht nothwendig, daß der Diviſor mit dem Dividendus von homogener Eigenſchaft ſey. Karſtens Geom. (§. 166.) und Euler theoria motus corporum solidorum seu rigidorum Cap. I. §. 35. bis §. 37.

2.) Iſt es unwiderſprechlich, während deſſe die Kraft durch den Bogen geht, während der nämlichen Zeit geht die Laſt durch den Sinus versus, und die Natur der Sache ergiebt, daß dies ſo wohl für den ganzen Circul als für unendlich kleine Bögen und Querſinus richtig ſeyn müſſe. Nun iſt aber die Geſchwindigkeit nichts anders, als das Verhältniß der in gleichen Zeiten zurückgelegten Räume, folglich müſſen auch die mit den Bögen ſtets in einerley Zeit zurückgelegten Querſinus und umgekehrt, die jedesmal Statt findende wechſelſeitige Geſchwindigkeit anzudeuten vermögend ſeyn. Z. B. wenn die Geſchwindigkeit der Kraft ſo groß iſt, daß ſie in einer Secunde einen Bogen von 20° durchläuft, ſo kann die Geſchwindigkeit der Laſt nicht größer und nicht kleiner ſeyn, als daß ſie während die-

dieſer Zeit den Sinus versus 20° durchläuft, und wenn die Geſchwindigkeit der Laſt ſo groß iſt, daß ſie in 1 Secunde den Querſinus von 20° durchläuft, ſo muß die Kraft binnen dieſer Zeit genau den hierzu gehörigen Bogen durchlaufen.

3.) Wenn aus der Differentialgleichung

$$dc = \frac{dC \sin \alpha \, d\alpha}{d\alpha}$$

etwas Anders herausgebracht werden zu können, und zu folgen ſcheint, daß wenigſtens für unendlich kleine Räume $dc = dC \sin \alpha$ ſey; ſo muß in der Art und Weiſe gefehlt ſeyn, wie dieſe Differentialgleichung behandelt worden iſt, und das iſt wirklich der Fall. Denn man darf, wenn Differentiale im Zähler und Nenner zugleich vorkommen, ſie nicht ſo gerade zu gegeneinander aufheben, weil ſich die Größen nicht wie ihre Gränzen verhalten.

Ein Beyſpiel wird die Sache gehörig erläutern. Wenn eine ſchwere Linie x heißt, ſo iſt ihr Moment $= x\,dx$ und das Differential ihres Schwerpuncts

$$= \frac{x\,dx}{dx}.$$

Hier bedeutet dx ſo wohl im Zähler als Nenner ein Gewicht, wie oben $d\alpha$ einen Bogen. Wenn man nun ſchlöſſe: folglich iſt der Schwerpunct der Linie $= x$, ſo würde das ſehr unrichtig ſeyn, indem er vielmehr

$$\frac{\int x\,dx}{\int dx} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \tfrac{1}{2}x \text{ iſt.}$$

Mit dem Aufſuchen des Schwingungspunctes hat es die nämliche Beſchaffenheit.

4.) Daß die mechaniſchen und ſtatiſchen Momente bey der Kurbel verſchieden ſeyn müſſen, dies folgt, da die Coefficienten des Widerſtandes und der Geſchwindigkeit Cir-

cul-

cullinien ſind, aus deren Natur und Eigenſchaft. Denn wenn sin. vers. $\alpha = x$ geſetzt wird; ſo iſt

$$\sin \alpha = \sqrt{(2x - x^2)} \text{ und } \frac{\text{sin. v. } \alpha}{\text{Bog. } \alpha} =$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{12}x + \frac{3}{160}x^2 + \frac{5}{896}x^3 + \text{etc.}\right)}$$ (§. 14.) Alſo

$$\sin \alpha = \sqrt{2x} - \frac{\sqrt{x^3}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x^5}}{8\sqrt{2^3}} - \frac{\sqrt{x^7}}{16\sqrt{2^5}} - \frac{7\sqrt{x^9}}{128\sqrt{2^7}} \text{ etc.}$$

und $$\frac{\text{sin. v. } \alpha}{\text{Bog. } \alpha} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x^3}}{12\sqrt{2}} - \frac{17\sqrt{x^5}}{1440\sqrt{2}} - \frac{253\sqrt{x^7}}{17280\sqrt{2}} - \text{etc.}$$

Letzterer Werth von erſterem abgezogen, bleibt

$$\sin \alpha - \frac{\text{sin v. } \alpha}{\text{Bog. } \alpha} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{5}{12}x - \frac{73}{1440}x^2 - \frac{371x^3}{34560} - \text{etc.}\right)$$

Hieraus ergiebt ſich nun offenbar:

a) Die Differenz

$$\sin \alpha - \frac{\text{sin. v. } \alpha}{\text{Bog. } \alpha} \text{ iſt } = 0 \text{ für } x = 0.$$

b) Je mehr x wächſt, je mehr nimmt der Werth der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{5}{12}x - \frac{73}{1440}x^2 - \frac{371}{34560}x^3 - \text{etc.}$$

ab, folglich am meiſten für $x = 1$, als den gröſten Werth den x im Quadranten haben kann. Weil aber die Differenz

$$\sin \alpha - \frac{\text{sin. v. } \alpha}{\text{Bog. } \alpha}$$

für $x = 1$ nicht $= 0$ wird; ſo kann dies noch viel weniger für die übrigen Werthe von x im Quadranten erfolgen.

c) Wenn die Werthe von x ſo reducirt würden, daß entweder sin $90° = 0,6366 \ldots$ oder auch

$$\frac{\text{sin. v. } 90°}{\text{Bog. } 90°} = 1 \text{ wäre,}$$

ſo müßte die vorgedachte Differenz für $x = 1$ zu Null werden, für $x < 1$ aber könnte dies der Fall ſo wenig als in (b) ſeyn, ausgenommen für $x = 0$. Weil aber

$$\frac{\text{sin. v. } \alpha}{\text{Bog. } \alpha} = 0,6366\ldots$$

ſo gut ein Maximum iſt, als sin. $\alpha = 1$ (§. 13.); ſo muß es in Anſehung der mechaniſchen und ſtatiſchen Momente eben ſo viel ſeyn, als ob ein größter Werth auf den andern beſagter Maßen reducirt wäre, woraus dann die Richtigkeit der Behauptungen im §. 16. erhellet.

Damit indeſſen dieſe Schlußfolgen um ſo deutlicher in die Augen fallen, will ich die Verhältnißzahlen der Coefficienten der Geſchwindigkeit und des Widerſtandes der Laſt von 10 zu 10 Graden neben einander ſetzen, und die Sinus ſo reduciren, als ob der Radius nicht $= 1$, ſondern $= 0,6366\ldots$ wäre.

Hiernach iſt

Für die Bögen von	Der Coeff. des Widerſtandes der Laſt	Der Coeff. der Geſchwindigkeit der Laſt	Differenzen von beyden Columnen
0°	0	0	0
10°	0,1105	0,0870	0,0235
20°	0,2177	0,1728	0,0449
30°	0,3183	0,2559	0,0624
40°	0,4092	0,3351	0,0741
50°	0,4877	0,4093	0,0783
60°	0,5513	0,4775	0,0738
70°	0,5980	0,5386	0,0694
80°	0,6269	0,5918	0,0351
90°	0,6366	0,6366	0

Es zeigt ſich alſo aus dieſer Tabelle hinlänglich die Beſtätigung des Vorigen. Die ſtatiſchen und mechaniſchen Momente, ob ſie gleich nach ihren größten Werthen auf einander reducirt ſind, ſind dennoch allenthalben von einander verſchieden, auſſer bey den Bogen für 0° und 90°. Ihr größter Unterſchied fällt, wie man ſieht, nahe an den 50ſten Grad, wo das ſtatiſche Moment am meiſten vom mechaniſchen abweicht, denn für den 49ſten Grad iſt der Coefficient des Widerſtandes der Laſt = 0,4805, und der Coefficient der Geſchwindigkeit der Laſt = 0,4017; daher die Differenz von beyden = 0,07829; für den 51ſten Grad aber iſt der Coefficient des Widerſtandes der Laſt = 0,49476, und der Coefficient der Geſchwindigkeit derſelben = 0,41645; alſo die Differenz von beyden = 0,07831. Für den 50ſten Grad hingegen iſt dieſe Differenz eigentlich = 0,07834.

Es ergiebt ſich eben das, wenn man aus

$$0,63662 \text{ sin.}\, \alpha - \frac{\text{sin v.}\, \alpha.}{\text{Bog.}\, \alpha} = z$$

das Maximum ſucht. Man erhält nämlich alsdann

$$\alpha \text{ tang.}\, \alpha - 0,63662\, \alpha^2 = \text{sec.}\, \alpha - 1.$$

Hieraus lieſſe ſich nun α berechnen, wenn man tang. α und sec. α in Theilen des Bogens durch unendliche Reihen ausdrückte. Weil aber dieſe Reihen ſehr wenig convergiren würden, und überdies α doch nicht anders als durch eine Näherungsmethode zu erhalten ſtünde; ſo wird man ſeinen Endzweck beſſer und kürzer erreichen, wenn man α aus der Gleichung

$$\alpha \text{ tang.}\, \alpha - 0,63662\, \alpha^2 = \text{sec.}\, \alpha - 1$$

durch Verſuche findet.

Nun iſt für 50°

$$\alpha \text{ tang.}\, \alpha - 0,63662\, \alpha^2 = 0,55522\ldots = A$$

$$\text{sec.}\, \alpha - 1 \text{ aber} = 0,5557238.$$

Für

Für 50° 10′ hingegen iſt

α tang. α — 0,63662 α^2 = 0,56162... = B
und sec. α — 1 = 0,561424.

Man kann daher nach Art einer Regel Falſi ſchlieſſen:

der Werh α	= 0,87266	α = 0,87557
giebt A	= 0,55522	B = 0,56162
Differenz	= 0,31744.	Diff. = 0,31395.

Wenn man nun ſetzt: die Summe dieſer beyden Differenzen = 0,63139, verhält ſich zum Unterſchied beyder Werthe von α = 0,00291 wie A = 0,55522, zum Ueberſchuß der geſuchten Zahl über 0,87266; ſo giebt die Rechnung 0,0018538, oder der Werth von α fällt auf 50° 6′ 10″.

Hier iſt alſo die Differenz der beyden Momente am größten; das will ſagen: wenn das ſtatiſche Moment zugenommen hat, bis die Warze des Krummzapfens auf 50° 6′ 10″ gekommen iſt, ſo hat es im Verhältniß des Wachsthums des mechaniſchen Moments ſeine höchſte Stufe erreicht. Es wachſen zwar beyde fort bis zu 90°, aber die Zunahme des ſtatiſchen Moments iſt von da an nunmehr geringer, als die Zunahme des mechaniſchen Moments, oder von hier an wächſt dieſes ſtärker wie jenes.

Alles dieſes zeigt die Fig. 5. ganz deutlich. Weil nämlich daſelbſt der Bogen des Quadranten in 5 gleiche Theile getheilt iſt, ſo hält jede Stufe von z bis a; a bis b; b bis c u. ſ. w. 18 Grade, daher fängt der Wachsthum des mechaniſchen Moments gegen C c an größer zu werden, als die Zunahme des ſtatiſchen Momentes von da an noch iſt.

Nun treten bey 51° 45′ und 55° 7′ die Mittelwerthe der ſtatiſchen und mechaniſchen Momente, einer nach dem andern ein, bis beym 90ſten Grad wiederum ihre Differenz verſchwindet.

Im zweyten Quadranten verhält ſich alles eben ſo, und man findet die Stelle der Bögen, wo die Mittelwerthe nebſt der größten Differenz der Momente eintreten, wenn man die Bögen 50°, 6′ 10″; 51°, 45′ und 55° 7′ von 180° abzieht.

§. 18.

Nach dieſen vorläufigen Erörterungen betrachte ich nun den Beharrungsſtand. Wenn, wie hier zum Voraus geſetzt wird, und in II (von §. 11. an) ſtets zum Grunde lag, eine Kraft an und für ſich auch völlig gleichförmig wirkt, ſo wird ſie, für den Anfang einer ihr zu betreiben überlaſſenen Maſchine, deren Gang ſo lange beſchleunigen, bis die mechaniſchen und ſtatiſchen Momente von Kraft und Laſt gleich geworden ſind. In dem Augenblick, wo dies geſchieht, tritt der Beharrungsſtand ein, und die Beſchleunigung hört auf. Aus dieſem Begriff folgt nun von ſelbſt, daß ſolches nie anders geſchehen könne, als daß

1.) die Laſt zuvor ihre größte Geſchwindigkeit erhalten habe, deren ſie unter den vorhandenen Umſtänden fähig iſt; und

2.) daß ſich zuvor der Widerſtand der Laſt ebenfalls zu ſeiner höchſten Stufe vergrößert habe, deren er fähig iſt, wozu alles, was nur kann, Reibung, Steifigkeit der Seile, Widerſtand der Luft, des Waſſers ꝛc., als welche ſämmtlich bey vermehrter Bewegung wachſen, beytragen wird.

Keine dieſer Bedingungen darf für den Beharrungsſtand fehlen. Fehlt Num. 1. ſo wächſt die Geſchwindigkeit

noch,

noch, es erfolgt alſo, gegen die Bedingung, noch Beſchleu⸗nigung. Fehlt Num. 2. ſo erfolgt Ueberwucht der Kraft, und mit ihr abermals Beſchleunigung.

Wendet man dieſe Sätze auf die Kurbel an, ſo er⸗hellet: Jeder folgende Umgang der Kurbel wird den vor⸗hergehenden ſo lange an Schnelligkeit übertreffen, bis die größte Geſchwindigkeit und der größte Widerſtand der Laſt in ihren Momenten, den Momenten der Kraft gleich geworden ſind. In jedem andern Punct, als auf welchen die größten Momente von Kraft und Laſt in ſtatiſcher und mechaniſcher Rückſicht fallen, wird, obgleich nach und nach die Umdrehung der Kurbel überhaupt ſo ſchnell gewor⸗den iſt, als unter den eintretenden Umſtänden möglich war, noch Beſchleunigung vorhanden ſeyn. Die Wiederkehr⸗puncte ausgenommen.

§. 19.

Blos alſo für die größten und kleinſten Mo⸗mente der Laſt gilt der Beharrungsſtand im ei⸗gentlichen Sinn, für alle übrigen ihres ungleich⸗förmigen Gangs iſt keiner vorhanden. Die größ⸗ten Momente ſind es allein, die der Beſchleunigung des Ganzen Gränzen ſetzen, und verurſachen, daß für einen Umgang der Maſchine nicht mehr Zeit verfließt als für den andern, oder daß die Umgänge überhaupt, und zugleich in einzelnen Puncten der Beſchleunigungsgrößen, einander gleich werden.

Die kleinſten Momente hingegen ſind die Urſachen der wiederkehrenden Beſchleunigung für einzelne Puncte einer und derſelben Umdrehung.

Alſo tritt nur für drey Stellen im Halb⸗kreis Beharrungsſtand im eigentlichen Sinne ein, für 0°; für 90° und für 180°, denn dieſe allein ſind

keiner

keiner Geſchwindigkeitszunahme fähig, und hier fallen zugleich allein die Verhältnißzahlen der mechaniſchen und ſtatiſchen Momente, wie für den Beharrungsſtand erforderlich iſt, in Eins zuſammen.

Zum Ueberfluß erinnere ich noch,

1.) daß das Wort Beſchleunigung, wie es von Mehreren geſchieht, hier im allgemeinen, ſowohl poſitiven als negativen Sinn genommen werde; und

2.) daß ich den aus der Verbindung der Circulbewegung mit geradelinigter nothwendig entſpringenden ungleichförmigen Gang der Laſt an und für ſich, nicht unter der Statt habenden Beſchleunigung mit begreife. Auch bey der vollkommenſten Gleichförmigkeit der Kraft müßte er dennoch ungleichförmig ſeyn, das bringt das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreis, folglich auch einzelner Stücke, nicht anders mit ſich.

Die 5te Figur wird die bisher vorgetragenen Sätze anſchaulich machen.

z, a, b, c, d, o, iſt die Bewegung der Kraft durch gleiche Räume, während deſſen die Laſt durch Z, A, B, C, D, O, in ungleichen Räumen ſteigt, wo ihre Geſchwindigkeit von Stufe zu Stufe zunimmt. Während deſſen nehmen nun auch die ſtatiſchen Momente A a, B b etc. zu, aber in andern Verhältniſſen, als die Geſchwindigkeit der Laſt. Die Unterſchiede a α; b β; etc. ſind erſt größer, dann werden ſie, nach zurückgelegten 50° 6′ kleiner, bis in O o das ſtatiſche und mechaniſche Moment in einen Punct zuſammen fallen. Die mittleren Momente treten, wie der Augenſchein lehrt, in der Gegend von C c und zwar eins nach dem andern ein. (§. 17.) Im zweyten Quadranten verhält ſich alles eben ſo, und dieſer ganze Erfolg muß Statt haben, wenn auch die Kraft ohne alle Beſchleunigung wirkte. Weil aber für z das

ſta-

ſtatiſche Moment = o iſt, ſo wird in dieſem Augenblick jedesmal die Kraft frey, welche daher Beſchleunigung und Ungleichheit der Zeiten in die einzelnen Theile des Gangs überhaupt bringt. Das Moment bey O o ſetzt jedoch der Beſchleunigung wieder Gränzen, daß im Beharrungsſtand eine Umdrehung der Kurbel nicht ſchneller erfolgen kann, als die andere.

§. 20.

Es bleibt nun dem Leſer überlaſſen, die oben im Auszuge dargeſtellten Theorien von Belidor, Karſten und Langsdorf mit den bisher erwieſenen Sätzen zu vergleichen.

In Anſehung der neueſten Langsdorfſchen Schrift über die Theorie des Krummzapfens z. B. wird ſich ſogleich finden, daß wenn daſelbſt das Problem:

> Nach welchem Geſetz wird die Fortſetzung der Bewegung des Krummzapfens erfolgen?

vorgelegt, und die Auflöſung ſo angefangen wird:

> „Das ſtatiſche Moment der Laſt iſt $= \text{Qr} \sin \mu + \text{r q}$, das der Kraft aber $= \text{r P}$. Macht man alſo $\text{r P} = \text{Qr} \sin \mu + \text{r q}$; ſo hat die Kraft während der Bewegung von ω bis a (Fig. 4.) wo $\omega \text{ e a} = \mu$ wird, beſtändig Ueberwucht, bis ſolche in dem Augenblick, da die Warze in a ankommt, = o wird“

daß, ſage ich, ſchon die erſte Forderung nur dann mit der Natur übereinſtimmend ſey, wenn $< \mu = 90°$ wird. Iſt $< \mu$ kleiner als 90°, und dennoch ſchon die Uebermucht am Ende, wie die Langsdorfſche Bedingung zum Voraus ſetzt, ſo wird ſich entweder P erſt verſtärken müſſen (wie z. B. bey einem Waſſerrade möglich wäre) damit es noch bis zu 90° aushalten, und da zugleich dem

Mo-

Moment der Laſt die Wage halten möge, oder, wenn es das nicht kann, ſo muß nothwendig die Maſchine ſtille ſtehen.

Aber der Schwung wird ihr überhelfen, möchte man denken.

Das wird allerdings geſchehen, in ſo ferne er nur groß genug dazu iſt. Da aber Herr Profeſſor Langsdorf in der angeführten Stelle keines Schwunges erwähnt, ſo muß er entweder ſagen, er ſteckt ſchon in der Größe P, oder er hat gar keinen in Rechnung ziehen wollen. In beyden Fällen wird aber die Sache nicht beſſer; denn ſteckt der Schwung bereits in P, ſo fehlt der Beweis, daß er nach ſeiner Vorausſetzung, ſchon beym $\angle \mu = 45^\circ$ jederzeit, und für jede Geſchwindigkeit durchaus groß genug ſeyn müſſe, um dem größten Widerſtand der Laſt bey 90° noch die Wage zu halten. Hat aber keiner in Rechnung kommen ſollen, ſo kann unmöglich für $\angle \mu = 45^\circ$ die Ueberwucht ſchon zu Ende ſeyn, da bey 90° erſt der Widerſtand am größten wird.

Was für $P = Q \sin \mu + q$ erfolgt, wenn $\angle \mu$ größer als 90° genommen wird, iſt für ſich klar.

> „Wir können alſo der Forderung, daß die Geſchwindigkeit nur bis zu $\omega a = 80^\circ$ wachſen ſolle, dadurch nicht Genüge thun, daß wir $P = Q \sin 80^\circ + q$ nehmen" ſondern müſſen die Naturgeſetze laſſen wie ſie ſind, und "für den Beharrungsſtand iſt $\angle \mu$ nicht $= 45^\circ$", ſondern erwieſener Maßen $= 90^\circ$.

Die Schlußfolge, daß für den Beharrungsſtand $\angle \mu = 45^\circ$ ſeyn müſſe, würde auch, alles Vorhergehende im erwähnten Tractat zugegeben, aus andern Gründen dennoch unrichtig ſeyn, die ich aber Kürze halber hier übergehe.

So

So z. B. würde aus der Langsdorfſchen Theorie folgen, daß, weil die ſtatiſchen Momente, wenn die Laſt in die Höhe gehoben, und wenn ſie wieder niedergedrückt wird, in der Ausübung nie vollkommen gleich ſind, man entweder zu behaupten genöthigt würde, die Verminderung und Vermehrung der Laſt habe keinen Einfluß auf ihre Geſchwindigkeit, oder ſagen müßte, es könne niemals ein Beharrungsſtand eintreten.

Den Satz im 4ten §. daſelbſt,

„daß nämlich der Effect der Maſchine durch den ungleichförmigen Gang der Warze um den 10ten Theil vermindert werde"

muß ich ebenfalls für unrichtig erklären. Herr Profeſſor Langsdorf folgert ihn aus der Gegeneinanderſtellung der Verhältniſſe 0,637 Q und 0,707 Q. Hier liegt alſo noch ein fernerer Irrthum zum Grunde. Er hat 0,637 r Q für ein mittleres Moment gehalten.

Die Formul zur Berechnung einer Maſchine mit einem Krummzapfen würde folglich für den Beharrungsſtand noch viel einfacher werden, als ſie Herr Profeſſor Langsdorf angegeben hat, und wäre, nach ſeiner Bezeichnungsart, blos

$$P = Q + q$$

wenn man anders dieſe Gleichung nur, als überhaupt Statt findend, annehmen dürfte, wovon hernach Mehr.

§. 21.

Ohnehin iſt es nicht in allen Fällen verſtattet, blos den Beharrungsſtand in Rechnung zu ziehen, man kann in der Ausübung auf Fälle ſtoßen, wo man auch in anderem Betracht die Geſchwindigkeit des Gangs der Maſchine, die Größe oder Dicke eines ihr beyzufügenden Schwungrades, und ſo weiter, wiſſen muß; es iſt alſo oft nothwendig, auf

auf die Beſchleunigung mit Rückſicht zu nehmen, und aus ihr die erforderlichen Reſultate zu entwickeln. Ich will daher das Hauptſächlichſte davon kürzlich berühren.

Wenn die aus dem 2ten Band der Langsdorfſchen Maſchinenlehre ausgezogene Bezeichnungsart beybehalten wird; ſo ſieht man, nach dem bereits Ausgeführten, leicht ein, daß für den Krummzapfen

die kleinſte beſchleunigende Kraft $= \frac{P - q - Q}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}}$,

die größte — — $= \frac{P - q}{\mathfrak{P}}$,

die mittlere — — $= \frac{P - q - 0,785\,Q}{\mathfrak{P} + 0,61685\,\mathfrak{Q}}$

ſeyn müſſe.

Dieſe Beſtimmungsarten kann man brauchen, wo man mit weniger genau zutreffenden Reſultaten zufrieden ſeyn darf. Wo aber größere Schärfe nöthig wird, da bleibt nichts übrig, als die bey der Kurbel ſo ſehr veränderliche Geſchwindigkeit, oder deren Höhe, durch die Integralrechnung zu ſuchen.

Aus §. 7. hat man, die Länge des Kurbelknies = 1 geſetzt;

$$\frac{P - q - Q \sin \alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \sin \alpha^2} = f.$$

Nun nimmt im erſten Quadranten offenbar die Beſchleunigung ab, ſo wie der Bogen zunimmt, wie aus dem Werth von f ſogleich von ſelbſt erhellet. (Man verwechſele übrigens dieſe Beſchleunigung nicht mit der §. 6. und §. 12. in Betrachtung gezogenen Geſchwindigkeit der Laſt, die ohne Rückſicht auf Beſchleunigung, bloß aus dem Verhältniß des Querſinus zum Bogen folgt, und deren Verſchiedenheit von letzterer (§. 18. Num. 2.) bereits erinnert worden iſt.)

Wenn

Wenn alſo v die zur Beſchleunigungsgeſchwindigkeit der Kurbel gehörige Höhe iſt, ſo muß für den erſten Quadranten ſeyn:

$$f : 1 = dv : -d\alpha; \text{ alſo}$$

$$f = \frac{dv}{-d\alpha}.$$

Für den zweyten Quadranten wächſt v mit dem Bogen, da übrigens aber alles darin eben ſo erfolgt, wie im erſten Quadranten, ſo darf nur α von 180° an rückwärts genommen werden, wie im §. 13. Man hat alſo

$$\frac{P - q - Q \sin\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \sin\alpha^2} = \frac{dv}{-d\,\text{Bog}\,\alpha}, \text{ oder}$$

$$\int dv = -(P - q) \int \overbrace{\frac{d\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \sin\alpha^2}}^{1} + Q \int \overbrace{\frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \sin\alpha^2}}^{2}$$

und weil das Differential eines Bogens das Differential der Tangente, mit dem Quadrate der Secante dividirt, iſt; ſo wird für $\tan\alpha = x$;

$$d\alpha = \frac{dx}{1 + x^2} \text{ und } \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

Hiernach erhält man ſtatt (1)

$$-(P - q) \int \frac{\frac{dx}{1 + x^2}}{\frac{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} x^2}{1 + x^2}} = -(P - q) \int \frac{dx}{\mathfrak{P} + (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}) x^2}$$

$$= -\frac{P - q}{\mathfrak{P} \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)}} \int \frac{dx : \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)}}{1 + \left(\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right) x^2}$$

$$= -\frac{(P - q)}{\sqrt{(\mathfrak{P}(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}))}} \,\text{Bog. Tang.}\, x \sqrt{\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}}.$$

Aus

Aus (2) wird $\displaystyle Q\int \frac{\frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}}{\mathfrak{P}+\frac{\mathfrak{Q}x^2}{1+x^2}}$

$$= Q\int \frac{x\,dx}{(\mathfrak{P}+(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})x^2)\sqrt{(1+x^2)}}.$$

Man ſetze $\mathfrak{P}=m$; $\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}=n$ und $m+nx^2=z$

ſo iſt $\frac{z-m}{n}=x^2$; und $dx=\frac{dz}{2n\sqrt{\frac{z-m}{n}}}$;

$$=\frac{dz}{2\sqrt{n(z-m)}}.$$

Folglich

$$\frac{x\,dx}{(m+nx^2)\sqrt{(1+x^2)}}=\frac{\sqrt{\frac{z-m}{n}}.\;dz}{2\sqrt{(n(z-m))}\,(m+n\frac{(z-m)}{n})\sqrt{(1+\frac{z-m}{n})}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{n}}.\;\frac{dz}{z\sqrt{(n+z-m)}}.$$

Es ſey nunmehr

$\sqrt{(z+n-m)}=y$; ſo wird $z=y^2-n+m$;
$dz=2y\,dy$; und

$$\frac{dz}{z\sqrt{(z+n-m)}}=\frac{2dy}{y^2-n+m}$$

$$=\frac{2\,dy}{(y+\sqrt{(n-m)})(y-\sqrt{(n-m)})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(n-m)}}\left(\frac{-dy}{y+\sqrt{(n-m)}}+\frac{dy}{y-\sqrt{(n-m)}}\right)$$ alſo

das Integral $=\frac{1}{\sqrt{(n-m)}}$ Log. nat. $\frac{y-\sqrt{(n-m)}}{y+\sqrt{(n-m)}}$

Stellt

Stellt man die vorigen Werthe wieder her, ſo wird das Integral von (2)

$$= \frac{Q}{2\sqrt{((\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})\mathfrak{Q})}} \text{ Log. nat. } \frac{\sqrt{((\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})(x^2+1))}-\sqrt{\mathfrak{Q}}}{\sqrt{((\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})(x^2+1))}+\sqrt{\mathfrak{Q}}}$$

Folglich iſt

$$v = -\frac{P-q}{\sqrt{(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}))}} \text{ Bog. Tang. } \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)}$$

$$+ \frac{Q}{2\sqrt{((\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})\mathfrak{Q})}} \text{ Log. nat. } \frac{\text{Sec}\,\alpha\sqrt{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})}-\sqrt{\mathfrak{Q}}}{\text{Sec}\,\alpha\sqrt{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})}+\sqrt{\mathfrak{Q}}}$$

$$+ \text{Const.}$$

§. 22.

Mit der Beſtimmung der Conſtante, und der Höhe für die Geſchwindigkeit im Beharrungsſtande verhält es ſich ſo:

Für Bog $\alpha = 0$ und $= 180°$ wird die Kraft frey, denn das Moment der Laſt iſt alsdann $= 0$. Hieraus ergiebt ſich, wie oben (§. 21.) erwähnt iſt,

$$f = \frac{P-q}{\mathfrak{P}}.$$

Wenn nun c die Geſchwindigkeit bedeutet, mit der ſich in dem Augenblick, wo dies erfolgt, die Maſchine bewegt; ſo iſt die zu dieſer Geſchwindigkeit gehörige Höhe

$$v = \frac{\mathfrak{P}\,c^2}{4g(P-q)}$$

Man hat daher

$$\frac{\mathfrak{P}\,c^2}{4g(P-q)} = \text{Const.}$$

und es iſt das vollſtändige Integral (D)

$$v = \frac{\mathfrak{P}\,c^2}{4g(P-q)} - \frac{P-q}{\sqrt{(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}))}} \text{ Bog. Tang. } \frac{\sin.\alpha}{\cos.\alpha}\sqrt{\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}}$$

+

$$+ \frac{Q}{2\sqrt{((\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})\mathfrak{Q})}} \text{Log. nat.} \frac{\sec\alpha\sqrt{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})}-\sqrt{\mathfrak{Q}}}{\sec\alpha\sqrt{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})}+\sqrt{\mathfrak{Q}}}$$

Nun findet ſich c folgender Geſtalt:

Es ſey die Geſchwindigkeit des Aufſchlagewaſſers, ſo wie es vom Gerinne abfließt = C; alſo die relative Geſchwindigkeit des Waſſers = C — c, daher ihre zugehörige Höhe

$$= \frac{(C-c)^2}{4g}.$$

Der Widerſtand, den an der Maſchine die Hinderniſſe der Bewegung dem Strom entgegen ſetzen, iſt gegeben, und = q. Es iſt aber dieſer Widerſtand dem Druck einer Waſſerſäule gleich, welche die fortzutreibende Schaufel zur Grundfläche und jene Höhe zur Länge hätte. Setzt man nun die Fläche der Schaufel = s^2, und das Gewicht eines Cubikfußes Waſſer = ψ; ſo wird

$$q = \frac{\psi s^2 (C-c)^2}{4g}$$

Hieraus ergiebt ſich

$$c = \sqrt{\frac{(C-4gq)}{\psi s^2}}$$

Oder, wenn man die in einer Secunde anſchlagende Waſſermenge A heißt, ſo iſt

$$s^2 = \frac{A}{C}; \text{ und}$$

$$c = \sqrt{\frac{C}{\psi A}(\psi A - 4gq)}.$$

Für den Beharrungsſtand iſt

$$\frac{P-q-Q\sin\alpha}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sin\alpha^2} = 0;$$

das

das giebt

$$\sin\alpha = \frac{P - q}{Q}.$$

Wird nun dieſer Werth in der Gleichung für v bey (D) ſubſtituirt; ſo erhält man (☿)

$$v = \frac{\mathfrak{P}c^2}{4g(P - q)} - \frac{P - q}{\sqrt{(\mathfrak{P}(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}))}}\,\text{Bog. T.}\,\frac{P - q\sqrt{(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q})}}{\sqrt{(Q^2 - (P-q)^2\mathfrak{P})}}$$

$$+ \frac{Q}{2\sqrt{((\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})\mathfrak{Q})}}\,\text{Lg. n.}\,\frac{Q\sqrt{(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})} - \sqrt{(\mathfrak{Q}(Q^2 - (P-q)^2))}}{Q\sqrt{(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})} + \sqrt{(\mathfrak{Q}(Q^2 - (P-q)^2))}}$$

Weil aber $\frac{P - q}{Q}$ ſtets nur einen beſtimmten Werth haben kann, ſo muß auch derjenige Sinus, dem dieſer Werth gleich iſt, nicht für jeden, ſondern nur für einen gewiſſen Winkel α gelten. Für Bog $\alpha = 0°$ und $= 180°$ kann es nicht ſeyn, denn da wird $Q \sin.\alpha = 0$, alſo bleibt keiner mehr übrig, als der Bogen für 90°, weil in allen übrigen Werthen von $\sin.\alpha$ noch Beſchleunigung der Maſchine in ihren einzelnen Theilen, und kein eigentlicher Beharrungsſtand Statt findet, in ſo ferne man nämlich jeden Umgang allein, oder an und für ſich ſelbſt betrachtet. Man erhält daher in der eben gefundenen Formul die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe bloß allein für den Fall, wenn die Kurbelumdrehung im 90ſten Grad ſteht. Die Gleichung $P - q = Q \sin\alpha$ kann alſo überhaupt nicht anders Statt haben, als für $\sin\alpha = 1$. Sie würde indeſſen ein ſehr bequemes Mittel darbiethen, die Hinderniſſe der Bewegung im Beharrungsſtande, für den Fall, wenn $\alpha = 90°$ iſt, ohne Mühe zu finden; denn man dürfte nur die auf einen gewiſſen Punct, z. B. die Warze des Kurbelknies reducirte Laſt, von der auf eben dieſen Punct reducirten Kraft abziehen, ſo würde man zum Reſt die geſammte Hinderniß der Bewegung, auf den nämlichen

chen Punct reducirt, erhalten, wenn nur dieſer Beharrungs⸗ſtand, abſolut⸗oder an und für ſich allein, und ohne Bezug auf die übrigen Umläufe der Kurbel betrachtet, nicht von zu kurzer Dauer wäre, als daß P — q wirklich = Q werden könnte. Dürfte man dieſes annehmen, ſo würde man oben bey (♀) bekommen,

$$v = \frac{\mathfrak{P}\, c^2}{4 g Q} - \frac{Q}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q})}} \text{ Bog. Tang. } \infty$$

$$+ \frac{Q}{2\sqrt{((\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})\mathfrak{Q})}} \text{ Log. nat. } \frac{Q\sqrt{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})}-o}{Q\sqrt{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})}+o};$$

oder

$$v = \frac{P\, c^2}{4 g Q} - \frac{1{,}57\, Q}{\sqrt{(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}))}}.$$

Man kann aber dieſen Werth dennoch gebrauchen, wenn v ſehr klein iſt; denn alsdann muß für sin α = 1 ſtets P — q beynahe = Q, im Beharrungsſtande ſeyn.

Für $< \alpha = 0$ iſt das ſtatiſche Moment der Laſt eben⸗falls = 0; folglich ſtrebt hier die Maſchine durch ihre anfangende Beſchleunigung alsbald P = q zu machen. Es würde auch wirklich dahin kommen, oder, welches Einerley ſa⸗gen will, endlich q ſo ſchnell ausweichen, als das Waſſer fällt, wenn nicht im nächſten Augenblick darauf ſchon wieder die Laſt Q dieſer anfangenden Beſchleunigung hinderlich würde, und wegen ihres immer wachſenden ſtatiſchen Moments auch ihrer eben deswegen immer abnehmenden Beſchleuni⸗gung, ſchon beym vierten Theil eines einzelnen Umlaufs wieder P — q = Q wäre. Im 2ten Quadranten nimmt nun das ſtatiſche Moment der Laſt abermals bis zu 0 ab, und mit dieſer Abnahme ſtrebt, bey der zugleich zuneh⸗menden Beſchleunigung, q ſich aufs Neue zu vergrößern, allein ſchon im 3ten Quadranten verhindert die Laſt Q dies ſogleich wieder, und ſo gehts immer fort.

Hier⸗

Hieraus iſt indeſſen erſichtlich, daß es für $\sin\alpha = 0$, wo $P = q$ zu werden anfängt, eben ſo gut einen Beharrungsſtand geben müſſe, wie für $\sin\alpha = 1$, wo $P - q = \mathfrak{Q}$ zu werden ſtrebt; und dies ſtimmt mit dem, was §. 19. geſagt worden iſt, völlig überein. Die Momente, wo $\sin\alpha = 0$ iſt, ſind die Urſache der wiederkehrenden Beſchleunigung, und dieſe erhält durch das Moment, wo $\sin\alpha = 1$ iſt, ihre Gränze; ſo daß der folgende Umgang nicht hurtiger werden kann, als der vorherige war.

Es iſt jedoch wohl zu merken, daß bey der Kurbel im Beharrungsſtande weder $P = q$; noch auch $P - q = Q$ wirklich werden, ſondern nur zu werden anfangen könne, doch aber dieſen anfangenden Werth, für alle Umläufe in gleicher Größe beybehalten müſſe.

Wie groß nun dieſer Werth eigentlich ſey, läßt ſich nur alsdann beſtimmen, wenn man den Schwung der Kurbel für die einſchlagenden Stellen nach Maasgabe der Geſchwindigkeit, welche die Kraft hat, berechnet. Man ſieht indeſſen aus dem Bisherigen,

1.) ohne Rückſicht auf den Schwung:

Wenn $P = q$ werden könnte, ſo müßte der Beharrungsſtand gleichförmig ſeyn. Eben das müßte erfolgen, wenn $P = Q + q$ werden könnte. Weil aber dennoch bey der Kurbel an der einen Stelle $P = q$; und an der andern $P = Q + q$ zu werden wirklich anfängt; ſo müßte für einen gleichförmigen Beharrungsſtand

$$Q + q = q;$$

das iſt, $Q = 0$ ſeyn. Hieraus ergiebt ſich alſo die Regel:

Je größer man bey der Kurbel die Kraft in Vergleichung der Laſt nimmt, oder auch, wie man findet, wenn man in der Gleichung

$$v = \frac{\mathfrak{P}c^2}{4gQ} - \frac{,5\,Q}{\sqrt{(\mathfrak{P}(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}))}}$$

$Q = o$ ſetzt; je geſchwinder man ſich die Kurbel bewegen läßt, deſto mehr nähert ſich ihr Beharrungsſtand, daher auch ihr Gang ſelbſt, der Gleichförmigkeit, und für eine Laſt, die in Vergleichung der Kraft verſchwindet, oder für eine unendlich große Geſchwindigkeit, würde ihr Beharrgungsſtand, folglich auch ihr Gang vollkommen gleichförmig ſeyn.

Es verſteht ſich übrigens von ſelbſt, daß hier vom Gang der Kurbel, nicht vom Gang der Laſt die Rede iſt. Letzterer wird nie gleichförmig, und kann es ſeiner Natur nach nicht werden, wie ſchon §. 19. Num. 2 bemerkt iſt; ausgenommen, wenn man die Kraft beſonders darauf einrichtete. Alsdann aber würde nun, ſtatt des Gangs von jener, dieſe, nebſt ihrem Gange, ungleichförmig.

2.) Nimmt man den Schwung, den ich $= h$ ſetzen will, mit in Rückſicht, ſo ergiebt ſich für den Beharrungsſtand,

$$\sin(\alpha + h) = \frac{P - q}{Q}.$$

Nun iſt für ſich klar, daß h für jeden Winkel α anders und anders ausfallen, auch ein Werth von h dem andern um ſo weniger gleich ſeyn werde, je langſamer die Bewegung der Kurbel iſt. Soll aber ein gleichförmiger Beharrungsſtand eintreten, ſo darf h für $\sin\alpha = o$, und für $\sin\alpha = 1$ nicht merklich differiren. Weil man aber erhält für $\sin\alpha = o$

$$\sin h = \frac{P - q}{Q},$$

und für $\sin\alpha = 1$

$$\cos h = \frac{P - q}{Q};$$

ſo iſt für den gleichförmigen Beharrungsſtand,

$$\sin h = \cos h.$$

Das

Das heißt: ein gleichförmiger Gang der Kurbel hat nur alsdann Statt, wenn die Geschwindigkeit derſelben ſo groß iſt, daß die Kurbel ohne Einwirkung der Kraft, oder wenn dieſe plötzlich aufhörte, noch für ſich einen Bogen von 45 Graden beſchreiben könnte.

Nun iſts aber für die Ausübung, um nämlich der Maſchine ihre gehörige Beſtimmung; auch nicht zu wenig Schwung zu geben, gar nicht gleichgültig, von welchem Winkel α man h zu rechnen anfangen; und 45 Grade weit fortlaufen laſſen will. Finge man bey $\angle \alpha = 0°$ an, ſo würde der Schwung ſicher zu klein, denn wenn er bey $\angle \alpha = 0°$ ohne Einwirkung der Kraft noch 45 Grade dauert; ſo wird das bey $\angle \alpha = 45°$ der Fall ſchon nicht mehr ſeyn, und hier der Schwung, ob er gleich bey $\angle \alpha = 0°$ auf 45 Grad reichte, nicht weiter als etwa bis zum 80ſten Grad kommen. Es gehört daher zu der eben erwähnten Regel noch folgende Beſtimmung

Die Geſchwindigkeit der Kurbel muß ſo groß ſeyn, daß ſie ohne Einwirkung der Kraft, von 45 Grad an, bis zum 90ſten Grad fortzulaufen im Stande iſt.

Aus der Zuſammenſtellung von Num. 1. und 2. folgt ferner:

3.) Je langſamer der Gang der Kurbel iſt, je kleiner alſo der Schwung wird, um deſto geringer muß die Laſt in Vergleichung der Kraft ſeyn, wenn ſich der Gang der Kurbel der Gleichförmigkeit nähern ſoll, und je geringer die Laſt iſt, deſto gleichfömiger wird der Gang der Kurbel werden.

§. 23.

Bey der Langsdorfſchen Formul für v (§. 7.) iſt die Conſtante unrichtig beſtimmt, und z. B. S. 602 der Grundlehren der mechaniſchen Wiſſenſchaften

$$\sin.\mu = \frac{P - q}{Q}$$

als ein Maximum, S. 604 ebend. aber dieſer nämliche Werth als ein Minimum betrachtet, überdies an mehreren Stellen die Geſchwindigkeit der Laſt mit der Geſchwindigkeit der Warze verwechſelt worden.

Aus dieſen und andern Urſachen, die ich übergehe, iſt es zugleich irrig, daß die Bewegung nur dann eines Beharrungsſtandes fähig ſey, wenn

$$t < \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{P}\,r}{g(P-q)\mathfrak{X}}}$$

wird. (Man ſehe §. 7.)

In der (§. 22.) für v gefundenen Gleichung muß

$$\frac{\sec\alpha\sqrt{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})} - \sqrt{\mathfrak{Q}}}{\sec\alpha\sqrt{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})} + \sqrt{\mathfrak{Q}}}$$

jederzeit ein eigentlicher Bruch, und kleiner als 1 ſeyn. Da nun Q von $\mathfrak{Q}$ nur wenig unterſchieden ſeyn kann, ſo muß der vor dem natürlichen Logarithmen ſtehende Factor abermals ein Bruch, und der ganze Werth um ſo kleiner werden, je mehr ſich $\angle\,\alpha$ dem 90ſten Grad nähert, denn für $\angle\,\alpha = 90°$ wird dieſer Logarithme $= 0$. Bewandten Umſtänden nach, wird man in mehreren Fällen der Ausübung den natürlichen Logarithmen mit ſeinem Factor als von unbedeutendem Einfluß auf das Ganze weglaſſen; und zum Beyſpiel für die Geſchwindigkeit $= C$ des Gangs der Kurbel ſetzen können,

$$C = 2\sqrt{g\,v} =$$

$$2\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{P}\,c^2}{4g\,(P-q)} - \frac{P-q}{\sqrt{\mathfrak{P}\,(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q})}}\,\text{Bog. T.}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}}\right)g}$$

Die

Die Folgerungen aus dieſer Gleichung, daß z. B. C wachſe, wenn P wächſt, aber mit dem Wachsthum von q abnehme, u. ſ. w. übergehe ich, als ohnehin in die Augen fallend.

§. 24.

III.) Wenn die Laſt der Kurbel ſo angehängt iſt, daß ſie von ſelbiger in horizontaler Richtung geſchoben wird.

Dieſer Fall kommt gewöhnlich bey Salzwerken vor, und das horizontale Geſtänge wird ein ins Feld ſchiebendes genannt. Die Kraft kann hierbey als in verticaler, horizontaler, oder ſchiefer Richtung wirkend gedacht werden, je nachdem z. B. ein oberſchlächtiges oder unterſchlächtiges Rad angebracht, und je nachdem letzteres mit einem flachen oder Kropfgerinne verſehen iſt.

Man drehe die 4te Figur ſo, daß das an der Warze des Krummzapfens hängende Geſtäng ω h horizontal zu liegen kommt, und ſtelle ſich bey d, g oder f die Kraft, und zwar als nach der Tangente von d, g oder f wirkend, vereinigt vor; ſo ergiebt die Lehre vom Winkelhebel, daß das Moment der Laſt, wie in II, $= Qr \sin. \alpha$; in ω auch d = o; in b aber = Qr; folglich dieſer Fall von dem vorher betrachteten, rückſichtlich der Wirkung von Kraft und Laſt, bloß wegen der Berechnung der Reibung verſchieden ſey. Es wird nämlich der Zapfen e ſowohl nach der Richtung der Laſt, als auch, wegen der Schwere des Rades und ſeiner Theile, zugleich vertical unterwärts gedrückt, hierdurch aber die Wirkung auf das Geſtäng ω h vermindert. Die Statik ergiebt, wie man ſo wohl den mittleren als den Seitendruck finden könne; ich halte mich daher hierbey, als einer, jedem Mechaniker täglich vorkommenden Sache,

weiter nicht auf, und will ſtatt deſſen noch einige Bemerkungen über den Gang der Kurbel vortragen, die von größerem Intereſſe ſind.

§. 25.

1.) Wenn man die (§. 22.) für v gefundene Formul nach der Lehre vom Größten und Kleinſten behandelt, und die Differentialgleichung derſelben (§. 21.) = o ſetzt; ſo erhält man

$$\sin \alpha = \frac{P - q}{Q}.$$

Differentiirt man abermals, ſo kommt für sin α bey einer quadratiſchen Gleichung ein doppelter Werth. Bey der dritten Differentiation ſteigt sin α bis zur 5ten Potenz mit umwechſelnden Zeichen. Hiernach bliebe es alſo durchaus zweifelhaft, ob

$$\sin \alpha = \frac{P - q}{Q}$$

ein größter oder kleinſter Werth ſey, wenn es die Betrachtung dieſer Gleichung nicht an und für ſich ergäbe. Nämlich im gleichförmigen Beharrungsſtand wäre

$$\frac{P - q}{Q} = 1,$$

für sin $\alpha = 1$, und alsdann muß die Beſchleunigung nothwendig ein Minimum ſeyn. Iſt die Maſchine nicht im Beharrungsſtand, ſo iſt immer

$$\frac{P - q}{Q} > 1$$

und nähert ſich noch dem kleinſten Werth. Eben das erfolgt für den ungleichförmigen Beharrungsſtand. $\frac{P - q}{Q}$ bleibt

als

alsdann zwar größer als Eins, es nähert ſich aber dieſer Gränze, ſo viel ihm der Gang der Kurbel zuläßt, folglich wird es auch hier ein Minimum. Wie groß dies Minimum nun eigentlich ſey, läßt ſich leicht ausmachen; nämlich nach §. 22. iſt jederzeit für $\sin\alpha = 1$

$$\cos h = \frac{P - q}{Q}$$

wornach, wenn eine von den Größen h, oder q bekannt iſt, die andere ohne Mühe gefunden wird.

2.) Bey der ſo ſehr veränderlichen Geſchwindigkeit der Kurbel, auch immer zu- und abnehmenden Beſchleunigung einzelner Umdrehungspuncte, ſelbſt im Beharrungsſtand des Gangs der Maſchine überhaupt, iſt es oft von Wichtigkeit die Größe ihres Schwungs für jede dieſer einzelnen Umdrehungspuncte anzugeben.

Die Geſchwindigkeit im letzten Augenblick, wo die Kraft noch auf die Kurbel wirkt, ſey $= c$; ſo iſt die Geſchwindigkeit der beſchleunigenden Kraft in der Zeit t,

$$c = \frac{P - q - Q\sin\alpha}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sin\alpha^2}\, 2gt;$$

oder, wenn man die Halbmeſſer ſo ausdrückt, daß für die Kurbelknielänge $= 1$, die Entfernung des von der Kraft angegriffenen Punctes $= R$ ſey; und die Momente der Trägheit von den in Bewegung ſich befindenden Theilen $= \mathfrak{M}\alpha^2$ ſetzt,

$$c = \frac{PR - q - Q\sin\alpha}{\mathfrak{P}R^2 + \mathfrak{M}\alpha^2 + \mathfrak{Q}\sin\alpha^2} . R . 2gt$$

Nach dieſen Beſtimmungen erhält man die Schwunghöhe, wie im §. 7 der Theorie des Schwungrades gezeigt worden iſt,

$$h = \frac{c^2}{4g} . \frac{\mathfrak{M}\alpha^2 + \mathfrak{Q}\sin\alpha^2}{(q + Q\sin\alpha)R} .$$

Je nachdem man nun (§. 21.); $\sin \alpha = 0$; $= 1$; oder $= 0{,}785$ ſetzt; je nachdem ergiebt ſich der Schwung für die größre, kleinſte, oder mittlere Beſchleunigung.

Man kann ſich auch der §. 22. gefundenen Gleichungen für v bedienen. Es iſt nämlich alsdann

v ſtatt $\frac{c^2}{4g}$ zu ſchreiben.

Weil jedoch $\sin \alpha$ während des Schwungs wieder um die Größe h wächſt; ſo iſt allenthalben Bog $(\alpha + h)$ ſtatt Bog α zu ſetzen, und es wird

$$h = \frac{v(\mathfrak{M}\alpha^2 + \mathfrak{Q} \sin(\alpha + h)^2)}{(q + Q \sin(\alpha + h))R}$$

wo man ſich einer Näherungsmethode, z. E. der ſehr paſſenden im 6ten Theil von Herrn Hofraths Karſten Lehrbegriff der geſammten Mathematik §. 496. bedienen kann.

3.) Soll die Maſchine ihre Bewegung fortſetzen können, ſo muß wenigſtens

$$\frac{\mathfrak{P} c^2 h}{4g(P - q)} > \frac{(P - q)h}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q})}} \text{ Bog. T. } \frac{\sin(\alpha + h)}{\cos(\alpha + h)} \sqrt{\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}}$$

für den größten Werth von $\sin(\alpha + h)$ im Quadranten, das iſt,

es muß $\frac{\mathfrak{P} c^2}{4g(P - q)} > \frac{1{,}57(P - q)}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q})}}$ ſeyn.

4) Soll die Maſchine, ohne Rückſicht auf den Beharrungsſtand, und bey jeder, wie man will, angenommenen Geſchwindigkeit, ihre Bewegung gleichförmig fortſetzen können, ſo müßte

$$\frac{\mathfrak{P} c^2 h}{4g(P - q)}$$

eine veränderliche Größe, und ſich genau nach dem Wachsthum und der Abnahme von

(P

$$\frac{(P-q)h}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q})}} \text{ Bog. Tang. } \frac{\sin(\alpha+h)}{\cos(\alpha+h)} \sqrt{\frac{\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}}$$

zu richten im Stande ſeyn. Dieſes würde ſich in der Ausübung bewerkſtelligen laſſen, wenn man die Kraft oder Laſt hiernach reguliren wollte. Man ſehe übrigens §. 22.

5.) Für $\sin\alpha = 1$ erhält man (§. 22.)

$$v = \frac{\mathfrak{P}c^2}{4g(P-q)} - \frac{1,57(P-q)}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q})}}.$$

Dieſes iſt die Höhe, welche der kleinſten Geſchwindigkeit zugehöret. Es ſey nun die kleinſte Geſchwindigkeit ſelbſt $= u$, ſo iſt v, oder die ihr zugehörige Höhe aus (§. 21.)

$$\text{auch} = \frac{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})u^2}{4g(P-q-Q)}; \text{ folglich}$$

$$\frac{\mathfrak{P}c^2}{4g(P-q)} - \frac{1,57(P-q)}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q})}} = \frac{(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q})u^2}{4g(P-q-Q)}; \text{ und}$$

$$u = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{P}c^2}{4g(P-q)} - \frac{1,57(P-q)}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q})}}\right)\frac{(P-q-Q)4g}{\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}}}$$

Die der größten Geſchwindigkeit $= c$ zugehörige Höhe nimmt alſo niemals um mehr, als um

$$\frac{1,57(P-q)}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q})}}$$

ab; und hieraus folgt ebenfalls, wie in Num. 3., daß nur unter der Bedingung die Maſchine ihre Bewegung fortzuſetzen vermag, wenn

$$\frac{\mathfrak{P}c^2}{4g(P-q)} > \frac{1,57(P-q)}{\sqrt{\mathfrak{P}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q})}} \text{ iſt.}$$

6.) Im §. 22. hätte man die Conſtante auch ſo beſtimmen können:

Für

Für Bog $\alpha = 90°$ iſt die Kraft am kleinſten, das Moment der Laſt am größten, und

$$f = \frac{P - q - Q}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}}$$

nach (§. 12.). Wenn nun u die Geſchwindigkeit für den Augenblick bedeutet, wo

$$f = \frac{P - q - Q}{\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}} \text{ wird, ſo iſt}$$

$$v = \frac{(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})\, u^2}{4g\,(P - q - Q)},$$

und daher die Conſtante

$$= \frac{(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})\, u^2}{4g\,(P - q - Q)} + \frac{1{,}57\,(P - q)}{\sqrt{\mathfrak{P}\,(\mathfrak{P} - \mathfrak{Q})}}.$$

Aus Num. 5. erhellet, daß dieſer Ausdruck Einerley mit dem in §. 22. gefundenen Werth für die Conſtante ſagen will.

7.) Es iſt keinesweges für die Maſchine gleichgültig, wie groß man die Entfernung des Kurbelknies von der Axe ſetzt, ſondern es giebt eine gewiſſe Länge deſſelben, wobey die Laſt am meiſten beſchleunigt wird. Man bekommt ſie, indem man das Maximum aus der Gleichung für die beſchleunigende Kraft ſucht. Die Beſtimmung dieſer vortheilhafteſten Höhe des Kurbelknies iſt für die Maſchine, wie bekannt, überaus wichtig, es iſt indeſſen für meinen gegenwärtigen Endzweck genug, darauf aufmerkſam gemacht zu haben, indem die Berechnung dieſes Maximi weiter nichts Beſonderes an ſich hat, und auf die nämliche Art gefunden wird, wie in der erſten Abhandlung an mehreren Beyſpielen gezeigt iſt.

Bey Maſchinen mit ſehr langen Feldgeſtängen iſt man wegen des Hubverluſtes jedoch manchmal genöthigt, das Kurbelknie größer zu machen als es eigentlich nach

dem

dem Werth für die größte Beſchleunigung der Laſt ſeyn dürfte. Ueberhaupt kommen eigentlich hier zwey Maxima und ein Minimum zuſammen zur Sprache, nämlich

1.) vortheilhafteſte Beſchleunigung der Laſt,

2.) vortheilhafteſter Kolbenhub,

3.) kleinſter Hubverluſt des Geſtänges.

Alles dieſes muß ſo gegeneinander abgemeſſen ſeyn, wie es der mit der Maſchine zu erreichenden Abſicht am beſten entſpricht.

§. 26.

IV.) Ich komme nun zur Berechnung der mehrfachen Kurbel.

1.) Wenn an einer Welle die Kurbel doppelt und ſo angebracht iſt, daß die Warzen um einen Bogen von 180° auseinander ſtehen, ſo lehrt die Natur der Sache, daß ihre Wirkung von der Wirkung der einfachen nicht verſchieden ſeyn könne. Wie die Momente der einen ſich verhalten, ſo verhalten ſich auch die Momente der andern, nur daß die eine Laſt niedergedrückt wird, während ſich die andere hebt.

Weil aber eine der Haupturſachen für die Anbringung mehrfacher Kurbeln darinn beſteht, ihren Gang gleichförmiger zu machen; ſo ſchlägt deswegen Herr Schober in ſeinem Verſuch einer Theorie der Ueberwucht S. 63 vor, die Krummzapfen ſo anzuſetzen, daß wenn man ſich durch die Warze eines jeden, und die Axe des Rades eine Ebene vorſtellt, beyde Ebenen einander unter einem rechten Winkel ſchneiden.

In dieſem Fall iſt das ſtatiſche Moment des einen Krummzapfens = r Q, während das andere = o iſt. Von dieſer Stelle an wachſen beyde bis zum Bogen 45°, alsdann nimmt

nimmt das eine wieder bis zu 0° ab, während deſſen das andere bis zu 90° zunimmt. Daß dieſe ſtatiſchen Momente in einem Bogen von 45° eingeſchloſſen ſind, findet man auch durch die Lehre vom Größten und Kleinſten, indem man das Differential von $Q(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$ ſetzt; als welches $\sin\alpha = \cos\alpha$ giebt, das beym Bogen von 45° eintrifft.

Das größte ſtatiſche Moment iſt alſo

$$= rQ \times 2 \sin 45°,$$

$$= rQ\sqrt{2};$$

das kleinſte ſtatiſche Moment aber iſt

$$= rQ.$$

Die kleinſte Geſchwindigkeit beyder Laſten zuſammen genommen iſt

$$= \frac{0{,}637\, Cr}{R}$$

die größte aber

$$= \frac{Cr}{R}\left(\frac{\text{sin. v. } 45° + \text{sin. v. }(45° + 90°)}{\text{Bog. } 45°}\right)$$

$$= \frac{0{,}745846\, Cr}{R}$$

Das mittlere ſtatiſche Moment ergiebt ſich durch folgende Formul, deren Richtigkeit aus §. 15. erhellet.

$$\frac{\frac{\pi r^2}{8} - \frac{1}{4}r^2}{r - r\sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4}\pi r = \frac{(\pi - 2)r}{8 - 8\sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4}\pi r$$

$$= \frac{(3\pi - 2)r}{8 - 8\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1{,}27294\, r.$$

Die

Die mittlere Geſchwindigkeit iſt aus §. 14.

$= 0,445116 + \frac{S}{\text{sin. v. } 45^\circ}$ nur in dem dortigen Werth von S; sin. v. 45° für x geſetzt, dies giebt dann nach gehöriger Rechnung

den mittleren Werth $= 0,68037 \frac{Cr}{R}$

§. 27.

An der dreyfachen Kurbel ſteht gewöhnlich jede Warze um einen Bogen von 120 Graden von der andern entfernt, und die ſtatiſchen Momente ſind in einem Bogen von der nämlichen Größe eingeſchloſſen, welches man auch findet, wenn man das Differential von $\sin\alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha + 240^\circ) = 0$ ſetzt, wo der herauskommende Werth, $\tang\alpha = 2\cos. 60^\circ$ ſolches anzeigt, in dem für $< \alpha = 60^\circ$; $\tang\alpha = 2\cos 60^\circ$ kommt.

Das größte ſtatiſche Moment iſt
$(\sin 90^\circ + \sin 210^\circ + \sin 330^\circ)\, Qr = (1 + 2 \times \frac{1}{2})\, Qr = 2\, Qr$; das kleinſte aber

$$= (0 + 2 \times \tfrac{1}{2}\sqrt{3})\, Qr = Qr\sqrt{3}$$

Die kleinſte Geſchwindigkeit der Laſt iſt

$$\left(0 + 2\,\frac{\text{sin. v. } 60^\circ}{\text{Bog. } 60^\circ}\right)\frac{Cr}{R} = 0,95494\,\frac{Cr}{R}.$$

Die größte hingegen iſt

$$= \left(0,637 + 2\,\frac{\text{sin. v. } 30^\circ}{\text{Bog. } 30^\circ}\right)\frac{Cr}{R}$$

$$= 1,14838\,\frac{Cr}{R}.$$

§. 28.

3.) Vierfache Kurbeln ſind nicht gewöhnlich, wie Belidor behauptet, weil, ſagt er, man ihnen nicht Stärke genug geben kann, um ſie vor dem Zerbrechen gehörig zu ſichern. Ich ſehe aber nicht ein, warum man nicht an beyden Enden einer Welle einen gekröpften Haken ſollte anbringen dürfen, ohne daß die Feſtigkeit darunter litte, dieſes wäre dann eine vierfache Kurbel.

Sind ihre Warzen um 4 rechte Winkel auseinander geſtellt, ſo kommt ihre Wirkung völlig mit Num. 1 (§. 26.) überein, nur iſt ſie doppelt.

Man könnte ſich auch, um von der Theorie in II. eine Anwendung zu machen, die Warzen auf andere Art, und z. B. ſo geſtellt denken, daß wenn die eine auf 0 Grad kommt, die andere auf 90°, die dritte auf 234° und die vierte auf 306° ſtünde, hierdurch käme die erſte und letzte um 54°, die nächſt folgende aber um 72° von der letzten zu ſtehen. Wer ſich die Figur zeichnen, und die Momente entwickeln will, wird finden, daß das kleinſte ſtatiſche Moment = 2, 1765706 r Q, das größte aber = 2, 2028731 r Q ſey, folglich hierdurch Vortheil gegen die vorhergehende Art, die Warzen zu richten, entſtehe, und der Unterſchied der Momente kleiner ausfalle.

Die mittleren ſtatiſchen Momente und Werthe für die mittlere Geſchwindigkeit der drey- und vierfachen Kurbeln übergehe ich. Ihre Aufſuchung hat zwar keine Schwierigkeit, iſt aber zum Theil etwas mühſam. Man kann jedoch ohne beträchtlichen Fehler nur das arithmetiſche Mittel zwiſchen dem größten und kleinſten Werth dafür annehmen, und allenfalls nach der Regel de tri ſchlieſſen: Wie ſich das arithmetiſche Mittel zwiſchen dem größten und kleinſten Werth bey der einfachen Kurbel gegen das wahre verhält, ſo verhält ſich auch die Sache bey der mehrfachen Kurbel.

§. 29.

Vergleicht man nun die Wirkungen dieſer mehrfachen Kurbeln ſo findet ſich das Verhältniß der größten Stärke zur größten Schwäche ihrer ſtatiſche Momente

bey der doppelten Kurbel, wenn die Warzen um 90° auseinander ſtehen . . . . . = 1,414236 : 1

bey der dreyfachen, ... = 2 : 1,73205

bey der vierfachen, wo die Warzen um 90° auseinander ſtehen, . . . = 1,414236 : 1

bey der letzteren Art, . . = 2,20288 : 2,17557.

Es bedarf übrigens keiner Erinnerung, daß in der wirklichen Ausübung verſchiedene dieſer Momente anders ausfallen müſſen, wenn die Laſt beym Niederdrücken größer iſt, als beym Hub derſelben, oder umgekehrt. Ich habe ſie hier alle gleich angenommen, und die Laſt ſo wohl beym Auf- als Niedergang = Q geſetzt. Jeder ſachverſtändige practiſche Mechaniker wird zwar ohnehin bey ſeinen Anlagen dafür ſorgen, daß die zu hebenden Laſten den niederzudrückenden ſo viel möglich gleich kommen. Kann er das aber nicht bewerkſtelligen; ſo wird er alsdann, wo möglich, wenigſtens keine dreyfache Kurbel wählen, ſondern eine mit einer geraden Anzahl von Knieen nehmen.

§. 30.

Es iſt noch übrig, von der Berechnung der beſchleunigenden Kraft bey den mehrfachen Kurbeln etwas zu erwähnen.

Die doppelte Kurbel, wo die Warzen um einen Bogen von 180° auseinander ſtehen, iſt von der einfachen, in Anſehung der Berechnung, nicht verſchieden. Für diejenige Art aber, wo die Warzen um einen Bogen von 90° aus-

ein-

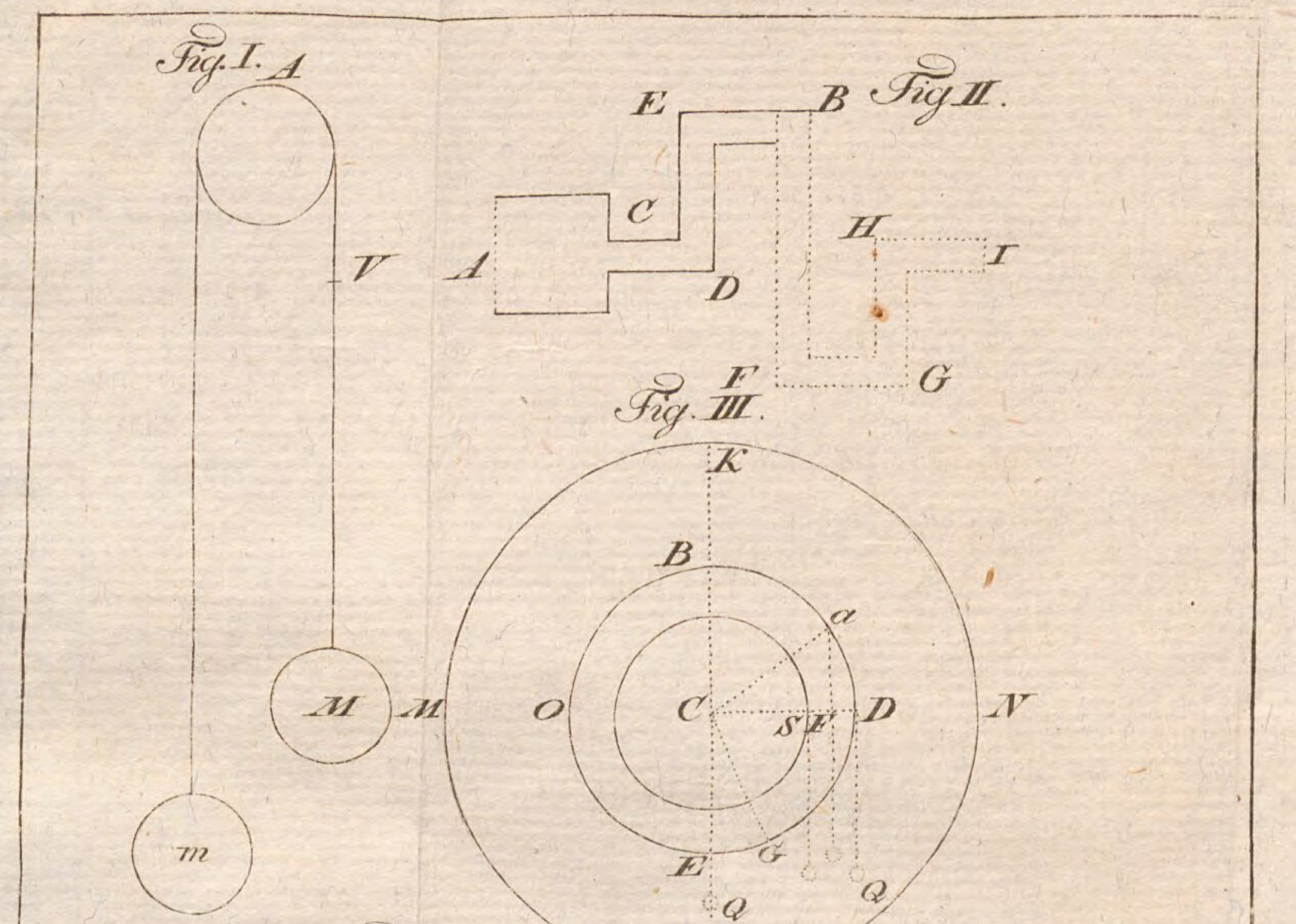
einander ſtehen, erhält man, wenn man ſich der bisherigen Zeichen bedient,

$$dv = -\frac{(P - q - Q(\sin\alpha + \cos\alpha))\,d\alpha}{\mathfrak{P} + 2\,\mathfrak{Q}\sin\alpha\cos\alpha}$$

und für $\tan \alpha = x$

$$\int dv = -\frac{P-q'}{\mathfrak{P}}\int\frac{dx}{x^2 + \frac{2\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}x + 1} + \frac{Q}{\mathfrak{P}}\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2 + \frac{2\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}x + 1)\sqrt{(1+x^2)}}$$

Der letzte Theil dieſes Differentials iſt ſchon ſo geartet, daß die Integration nicht anders als ſehr mühſam, durch eine unendliche Reihe bewerkſtelligt werden kann. Daß alſo die Ausdrücke für die noch mehr zuſammengeſetzten Kurbeln noch größern Schwierigkeiten und Weitläuftigkeiten, bey der Berechnung der ihrer Geſchwindigkeit zugehörigen Höhe, verurſachen werden, läßt ſich leicht vorausſehen. Weil indeſſen, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, ſo wohl das ſtatiſche als mechaniſche Moment bey den mehrfachen Kurbeln lange nicht ſo veränderlich, oder ihre Ab- und Zunahme in weit engern Gränzen, als bey der einfachen Kurbel eingeſchloſſen iſt; ſo wird man in der Ausübung immer die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe ohne Anwendung der Integralrechnung finden, und die beſchleunigende Kraft als beſtändige, nur vom Winkel, um den ſich die Kurbel dreht, abhängige Größe annehmen können.



Seelmann sc. Offenbach

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Brodreich, Heinrich Christian

Versuch der Theorie des Schwungrades und der Kurbel

Frankfurt 1805

Math.a. 50

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080593-3